ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA

ARGENTINA

DIRECTOR : INGENIERO JULIO R. CASTIÑEIRAS

TOMO XCV

Primer semestre de 1923

BUENOS AIRES

IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »

684, PERÚ, 684

—

1923

DENSIFICACIÓN INFINITESIMAL

MATERIA, EVOLUCIÓN, CUERPO HUMANO
HARMONIZACIÓN TENSORIAL. LA OBRA DE H. WEYL

Por JAIME MULHALL

En nuestro *continuum* mayor o Universo rige una invariante : la *repetición*.

AB INITIO

Una obra de índole geométrica-física no es exactamente la que se presta para hacer gala de lenguaje, o elegancia de dicción; al contrario, en esta clase de « literatura » es más bien la monotonía y tautología que descuellan. En especial, la que acá se presenta carece de todo adorno verbal y las muy numerosas reiteraciones en un esquema fonético invariante han de causar verdadero fastidio a muchos lectores. Se ruega, particularmente a éstos, la concentración sobre el sentido y no la figura de la frase, ofreciéndoles como disculpa la clásica de Boltzmann, repetida por muchos, inclusive el mismo A. Einstein: « no se ocuparon los servicios del sastre ni del zapatero en la localidad » !

Aquel que cultiva « la reflexión » como un hábito intelectual, experimentará, sin duda, grandes placeres al tomar contacto con la naturaleza y divisar algunos de los secretos de su obra fenomenal, aunque sólo sea por el medio filosófico-geométrico, que no exige un conocimiento profundo de las matemáticas. Desgraciadamente, es muy necesaria la preparación matemática para el estudio de la filosofía natural, de manera que aquellos lectores poco familiarizados con

los conceptos geométricos, etc., tendrán, *a fortiori,* que hacer esfuerzos intelectuales superiores a los usuales en el curso ordinario de sus estudios y esto puede ser motivo de « desfallecimiento en el camino » y pérdida de interés. En cambio, aquel que domina las matemáticas en general y el cálculo tensorial en particular, experimentará sensaciones de asombro y de inmenso placer. Este inmenso placer estribará en la convicción, inmediata y completa, que ha estudiado « para algo », y que la vida brinda nuevos alicientes de orden intelectual, desconocidos anteriormente. Sentirá renacer fuerzas e interés y se afirmará en su nueva decisión de seguir estudiando, seguir observando y así: seguir adelante. ¡ Ojalá !

No se ha escatimado esfuerzo alguno que pudiera redundar en la mejor comprension de las ideas, métodos y cálculos, etc., aquí consignados. Una sola mira ha existido, única, *invariante absoluta : exhibir la verdad, libre de fases !*

Para que el trabajo resultase completo, se ha compendiado en forma especialmente clara la geometría infinitesimal de H. Weyl, esto es: el cálculo tensorial infinitesimal, y se ha añadido un resumen de la teoría de determinantes, indispensable para abordar ese cálculo. Un lector, con preparación matemática adecuada, que comprenda Analítica, Cálculo infinitesimal y Mecánica racional, descubrirá fácil el camino después de vencer ciertas «modalidades mentales», inculcadas en el aula. Para quien desea profundizar el Método tensorial hay que recomendar una obra — magistral : — la titulada *Espacio, Tiempo y Materia* del profesor H. Weyl, de Zurich; esta obra es al mismo tiempo el «completo Einstein», pues contiene la Teoría general del relativismo.

Vivimos ahogándonos en un *maremagnum* de fases, un verdadero infinito fásico.

IDEAS FUNDAMENTALES

La construcción del edificio perceptible del Universo está regida por una ley abstracta, *única, simple e invariante,* a saber : la *Repetición,* cuyo símbolo es el *Número !*

La Repetición *excluye la posibilidad de la Coincidencia,* y, por lo tanto, obliga, *dura lex,* la *Propagación !*

Un astro nace por efecto de *una focalización* de la *Repetición* en *un punto* de nuestro *continuum* mayor, y como una resultante, integral, de *un apilamiento !*

Focalizadas, varias *Propagaciones,* en un punto del *continuum* mayor, sobreviene « el apilamiento » : la *génesis del astro !*

El *procedimiento natural* es : *infinitesimal.*

Resultado : Composiciones recíprocas y la *Densificación infinitesimal !*

Ser humano. — El cerebro humano es un *continuum menor !*

La *Repetición penetra* a este *continuum* por conductos determinados que sólo difieren *fásicamente. Aferencia.*

Resultado : *Focalizaciones* en el cerebro ! — Esto es : *Apilamientos infinitesimales y eferencia.*

De aquí : *Densificación progresiva.*

Fin : *¡ El cuerpo humano !*

Prueba. — La figura de nuestro cuerpo humano responde con exactitud matemática *a nuestras constantes planetarias,* y se funda sobre la invariante universal : la *Repetición.* La simetría lateral, por inversión meridiana, por ejemplo, es *una repetición* que corresponde a la *harmonización diurna* de la acción estática solar, etc., etc. La simetría radial a una propagación difundida « térmica », etc.

A título de simples curiosidades se consignan las siguientes consecuencias lógicas que emanan de las « matemáticas » :

Medicinales. — Tratamiento posible de enfermedades por medio de la obscuridad absoluta ;

Fortificación del sistema general por medio de períodos de descanso en la obscuridad, silencio y temperatura constante;

Y una porción, indefinida, de otros que se podrán deducir directamente, por simple lógica o por intuición.

Pringles, Río Negro, octubre de 1922.

DIGRESIÓN 0

Generalidades

« *Utile dulce.* »

Al abordar este estudio se han tenido varios fines en vista, entre éstos, el principal, ha sido el de allanar el camino para quien desee dedicarse a la observación de la naturaleza, que se presenta bajo la forma de materia y penetrar los secretos que gobiernan a su fenome-

nalidad. Alberto Einstein ha abierto los ojos de la humanidad. No tenemos más que « mirar » y avanzar por el camino indicado, que él nos ha señalado. Gracias al relativismo generalizado, este magno problema de la materia, su constitución y su evolución, se asoma planteado geométricamente. Es posible que algún lector se atreva *a dominar la parte matemática necesaria* y una vez posesionado del método avance solo. ¡ Ojalá !

Para poder consolidar las cosas en el punto en que Einstein y Weyl *las han dejado* se ha tenido que vencer una dificultad *grande,* a saber : *librarse de « fases »*. Es extraordinario cómo vivimos envueltos por « las apariencias » y cómo nos dejamos engañar por las mismas. Resulta que, en el caso que tratamos, *el engaño existió oculto en la misma base del edificio geométrico levantado con el nombre de cálculo tensorial infinitesimal;* allí estaba : *en los cimientos.*

Descubierto el enemigo se ha procedido a eliminarlo mediante *una reconstrucción* y a este proceso se ha designado : « Harmonización del cálculo tensorial. » La reconstrucción coloca a este método geométrico, magistral, sobre una nueva plataforma sólida *invariante* y de perfecto e *íntimo acuerdo con la naturaleza.*

Las digresiones filosóficas tienen por objeto « variar », y así disminuir toda posible « aridez », muy natural acompañante de cualquier estudio matemático. Por otra parte, el método matemático no es « extraordinariamente dificil », es « nuevo » y exige un cambio de « hábito mental » nada más. Se pierde poco tiempo *en fases,* como sería, por ejemplo, un detalle de las propiedades geométricas de las cónicas, o las posibles consecuencias de variar el número de constantantes en una ecuación general, etc. Sólo se buscan « invariantes » — esas leyes *inmutables* que dirigen toda la fenomenalidad. Para comprender este punto de vista hay que considerar un ejemplo práctico, sea : *un punto,* que se mueve en un espacio continuo cualquiera. Podemos muy naturalmente dirigir el movimiento del punto por medio de un parámetro, *ad hoc,* como quien dijera : desde afuera. Efectivamente, y por medio del *cambio de valor de las coordenadas del punto* conoceremos su trayectoria en el espacio continuo. Pero también podemos proceder de otra manera. Podemos *provocar* ese cambio de valores de las coordenadas del punto mediante *transformaciones continuas de coordenadas* y hacer conformar estas *transformaciones* a ese *movimiento descrito.* La situación ahora es la siguiente : un observador posado en el punto no se moverá, *pero existirá como en un maelström,* pues será el espacio el que *se deformará continuamente produ-*

ciendo el efecto de movimiento. El observador existe en un sistema « geodésico ». Una analogía : lo que sucedería a uno, en *un ascensor* que se desploma, sin fricción, desde una inmensa altura, hacia el suelo, por haberse cortado « la cuerda » — para aquél *no habría gravitación,* estaría en *un espacio libre* dentro del ascensor. Aquí, pues, *está evidenciado el segundo punto de vista, que es el que se adopta siempre.* Divisamos *el estado estacionario,* y el magistral concepto de Hamilton. Matemáticamente el ascensor es un sistema geodésico estacionario.

Pasemos ahora a hacer algunas consideraciones de carácter general, que son pertinentes, aunque muy superficiales.

Corriente es el refrán : *la historia se repite.* ¡ Y qué monumental verdad encierra! Una verdad geométrica y física a la vez : *la periodicidad.* Esta verdad enhebra todos los fenómenos de *la naturaleza* perceptibles para nosotros; esto es : *de nuestro mundo perceptible.* Cuando Newton indicó la forma de estudiar matemáticamente el comportamiento de los « sistemas materiales » se produjo un momento de asombro, se creyó que la naturaleza había entregado la llave. Rápida fué la desilusión y la comprensión de la nueva situación creada — se veía más lejos y, por lo tanto, se veían nuevas y más formidables cuestiones a resolver. Pero se había conquistado una altura, y *se veía más lejos.* Hoy pasa otro tanto.

Einstein nos ha conducido de la mano hasta una altura formidable, colosal. El panorama es tan grandioso que aun no hemos recobrado la calma necesaria para poder analizar friamente lo que se ve. Estamos aún gritando uno al otro: *¡ mira esto ! ¡ mira aquello !*

Todos los fenómenos de nuestro mundo perceptible son *variaciones de valores en el campo métrico de un continuum a cuatro dimensiones.* Intuitivamente está resuelto el problema mundial — pero solamente *intuitivamente,* — falta formular esta intuición. Gauss decía a sus amigos que, *intuitivamente,* tenía resueltos muchos problemas, no obstante tropezaba con las mayores dificultades para poder dar expresión concisa a esos triunfos mentales. No cabe duda que muchísimos quedaron en su cerebro sin ver la luz. Pero hay que decirlo siempre, sin cansar en repetirlo: Gauss nos dió sus *Disquisitiones circa superficies curvas* y con esto basta. De ahí salió Riemann!!! y hoy tenemos a Einstein!!!

Riemann creó al *continuum ie;* el espacio continuo puntual de n dimensiones, y se apercibió que las matemáticas abstractas no fijaban el valor dimensional n de la multiplicidad puntual : se halló

frente a frente con una multiplicidad continua. Einstein nos ha revelado que una acción limita al número n : la gravitación. Quedamos asombrados.

Ahora, en vista del relativismo, es posible arrancar desde este punto einsteiniano y concentrar la atención sobre la historia de la gravitación percibida por la conciencia humana bajo la forma de *una realidad absoluta* en la densificación infinitesimal. Siendo imposible percibir « el presente » no hay para qué mencionar el futuro.

En breves palabras: todos sabemos que en un espacio libre newtoniano no se puede distinguir un sistema cartesiano de referencia de otro sistema cartesiano igual. Ahora bien, si se figura un plano, por ejemplo, de puntos, dotado de continuidad puntual, se descubrirá que en ese plano será imposible distinguir una asociación de puntos del resto de la puntuada plana. La razón está a la vista y consiste en «la igualdad» que prevalece e impide diferenciaciones. Por el momento se puede dejar el problema de « la continuidad puntual» en el plano cuya explicación matemática se reserva para más adelante.

Resulta, en consecuencia, que si nosotros pudiéramos *alterar tan sólo la posición de un punto relativamente al vecino* ya habríamos introducido en el plano una *diferenciación dimensional* que sería suficiente para que *distinguiésemos ese par de puntos entre los infinitos restantes del plano*. Así habríamos logrado diferenciar *una dimensión* en *un continuum a dos dimensiones*. Fácil es generalizar esto y aplicar el principio al *continuum n dimensional*. Einstein dice que *ésta es la acción de gravitación* y aquí se dirá que es más: es *una densificación*, o historia de una acción de gravitación, ya que no podemos percibir el exacto presente. Einstein derribó la noción de velocidad infinita en la forma conocida y ahora hay que tener en cuenta la transmisión de percepciones y el ajuste que involucran.

Resulta, pues, que la *realidad de un fenómeno* estriba en el simple hecho de *dejar una historia densificada perceptible*. Si *no deja historia densificada, perceptible*, será para nosotros « una *verdad relativa* », como cuando vemos *moverse un cuerpo en el continuum espacial mayor*. Pero, *si deja historia en forma de traza densificada, todos la percibiremos y todos la percibiremos de la misma manera*, — no habrán discusiones, y esto lo llamaremos *realidad absoluta*. El celebre doctor S. Johnson (biografía Boswell) golpeaba una piedra con el pie — ya no tenía dudas acerca de la realidad de su existencia, i. e., *una historia densificada*.

La densificación, pues, es una *dimensionalización en el continuum* y

¡ mirabile dictu ! es *para nosotros la historia perceptible de una acción realizada.*

Pero fácil es comprender que *la esencia* de una *densificación* estriba en *un movimiento puntual;* diremos, en consecuencia, que *la acción* que obra sobre los puntos de un continuum *introduce un parámetro temporal determinado* en el mismo, *dentro del cual no existía antes.* Este parámetro temporal *es parte de la acción en evolución.* — A diferentes « acciones » corresponden *diferentes tiempos, diferentes densificaciones,* y todas éstas están sujetas al principio newtoniano del *Lex II,* Principia, etc.

Teniendo presente esto, se verá *inmediatamente* lo que se quiere decir cuando se establece que : *una densificación periódica es una reproducción de especie* y es *una historia que se repite !!!* A esto se quería llegar *acá* para dejar constancia de la gran profundidad de la verdad que encierra el refrán con el cual se iniciaron estas líneas.

Nuestra existencia, desde este punto de vista, aparece como una historia que se desarrolla guiada por un parámetro temporal complejo, en un *continuum* mayor : universo.

La conciencia humana es un *continuum* menor — muy de acuerdo con una observación extraordinariamente acertada del astrónomo A. S. Eddington, — dentro del cual penetran las acciones exteriores por un proceso de « repetición », y allí *densifican infinitesimalmente* sus historias. Estas densificaciones corresponden a las acciones repetidas que las producen en una forma parcial, como se ha de ver oportunamente. El proceso es muy simple: cuando la acción es efímera, la densificación también lo es, como es evidente cuando se tiene presente el carácter infinitesimal de la misma. Veo un libro y en mi conciencia se densifica una réplica parcial; desaparece el libro y con éste la impresión o acción, quedando una « densificación fluida » como efecto remanente. La prueba de la densificación producida reside en « la memoria » como fenómeno inmediato. A esta categoría pertenecen las *densificaciones fonéticas* producidas por el idioma, aunque éstas, siendo más repetidas y continuadas en su acción, dejan rasgos físicos integrales y perceptibles como « realidades absolutas ». Cualquiera puede por inducción deducir consecuencias.

Nuestra Tierra provee al *continuum* de nuestra conciencia los *puntos densificables* por un método de « harmonización descendente » especial denominado nutrición y *las acciones exteriores* que penetran a nuestro cerebro son *las responsables* de las densificaciones subsiguientes. Esta operación admirable se logra en virtud del *principio funda-*

mental básico de ser toda densificación el resultado de un processus infinitesimal. Quiere decir, que la edificación de nuestro cuerpo es una *verdadera integración,* y que *progresa infinitesimalmente.* Así es que se explica *cómo nuestro cerebro dirigiendo, bajo la tutela del mundo exterior,* consume la obra, a saber: *el cuerpo humano.*

Esta tremenda realidad nos rodea en forma infinita de todos lados.

Por último, nuestra propia *simetría lateral* y la disposición de los órganos que sirven de conductos a las acciones que penetran a nuestro *continuum cerebral* demuestran palpablemente la verdad de la *dimensionalización* que venimos explicando. Esto es: *la rotación axial* de *nuestro planeta* en el *campo estático solar, a simetría radial esférica, convierte a la acción solar en una acción diurna harmónica.* Sí, pues, la acción solar produce *densificación,* o sea: *densifica su historia, en nuestro continuum cerebral* nos figuraríamos que *la historia densificada de una acción representada por Oriente-Mediodía sería igual y simétrica, por inversión, a una acción representada por Mediodía-Poniente.* Y esto corresponde a la realidad de los hechos !!!

Esperaríamos encontrar *los conductos históricos* por intermedio de los cuales *penetran las* acciones a nuestro *continuum cerebral,* densificados *adecuadamente* según la procedencia *de estas acciones.* Así es que no nos sorprende observar que aquellos órganos que admiten acciones *exteriores a nuestro planeta* ocupen posiciones *simétricas laterales, por inversión, respecto a un plano meridiano que corresponde al mediodía de la acción exterior. Mucho nos sorprendería* hallar una simetría *Zenit-Nadir !!!*

Comprendemos así el efecto de *nuestras constantes planetarias* y *su importancia,* y muchísimos otros detalles. Repetimos pues : no se esperaría hallar simetría en la dirección de Zenit-Nadir, excepto por efecto de acciones difusas, etc.

Una semilla constituye un *continuum* especial densificado, del cual aparentemente ha desaparecido una acción. En realidad es «una focalización» aislada en virtud de *una discontinuidad* de acción, como se verá en otro lugar. Aquí se dirá que es *una historia completada de una acción grupal harmónica que ha cerrado su ciclo de cero a cero,* con un paso por el infinito (1).

Hoy día, cuando contemplamos un árbol decimos: una figura de equi-

(1) Más adelante apareecrá el significado de ésto. El Sol pasando por el meridiano mediodía cambia de signo pasando por cero y pasando por media noche cambia de signo pasando por infinito. Esto se repite orbitalmente en perihelio y afelio, etc.

librio. Pero hay algo más que la frase pintoresca de «relación estacionaria entre campo y materia». El árbol es «una propagación» dirigida por acciones exteriores que a su vez son «propagaciones». Es *un grupo de repeticiones,* de gran complexidad. dotado de «continuidad», *que se repite* en una forma especial *regida en absoluto* por *constantes planetarias terrestres.* Se debe, pues, ver en un árbol algo más que la figura matemática abstracta de equilibrio, lo mismo que en el cuerpo humano y sus caracteres físicos perceptibles. Se ha de conocer oportunamente que un estudio de los movimientos de un árbol en el sentido de la observación de *irregularidades* en sus *repeticiones,* aparte de *las regularidades* en las mismas, puede revelar leyes astronómicas, meteorológicas, etc., etc. Puede decirse que la existencia arbórea es dirigida por un parámetro de aspecto compuesto, que contiene una serie de términos harmónicos, agrupados linealmente, y que cada término registra una historia de densificaciones repetidas. A cada término de la serie corresponde una acción exterior. Todo es muy visible en las fases que recorre un árbol anualmente y que repite. Se volverá sobre el punto para buscar leyes invariantes fundamentales y universales del *processus.*

Busquemos ahora algunas dificultades. No hay que ir muy lejos, pues *las fases* se multiplican *ad infinitum* a cada paso. Tomemos otro ejemplo de «intuïción». Estamos palpando que *el color* de una materia proclama *el orden de la densificación.* Es un plano detallado de la materia visto, por iluminación en el campo solar, a *una desesperante distancia* — como cuando vemos un monte de árboles desde lejos, comprendemos por *lo verde* que *son árboles,* pero no podemos distinguir *los árboles* — sabemos lo que es y nos formamos *imagen detallada del monte por el color,* porque hemos podido verlo de cerca anteriormente, porque hemos andado en el monte. Esto es lo que sucede con la materia y *su color.*

Cualquier alteración en la densificación se revela en un *cambio de color* y donde esto está admirablemente evidenciado es en el curso del desarrollo del arbol que ya citamos. Cuanto más homogéneo un monte más uniforme será su color. Pero nunca hay que perder de vista que el color es un fenómeno indirecto y «fásico» que depende de *la iluminación.* Esta observación nos hace detener el paso y reflexionar; y. como ejemplo de la complicación que introduce aquí el relativismo, y la verdad que nos hace descubrir, añadiremos lo siguiente: supongamos dos sistemas en un espacio plano Euclideano afín, i. e., un espacio libre Newtoniano, uno R_e y otro R_p, los cuales se mueven

uniformemente, uno relativamente al otro con velocidad constante v. Para mayor sencillez imaginaremos que nosotros nos hallamos en R_p, y que, por lo tanto, estamos en reposo; decimos que R_e se mueve y diremos que v es la velocidad *normal* a la dirección en que vemos a R_e. Si m es una masa en R_e y μ_0, V_0 su densidad y volumen, respectivamente, en R_e, en reposo, tendremos por relativismo el siguiente fenómeno:

En R_e

$$m = \mu_0 V_0,$$

y en R_p

$$m = \mu V,$$

por *invariación* de m

$$m = \mu_0 V_0 = \mu V,$$

pero sabemos que

$$\begin{cases} \mu_0 = \mu\sqrt{1 - v^2} \\ V = V_0\sqrt{1 - v^2} \end{cases} \qquad c = 1 = \text{vel. luz}$$

por donde deducimos una alteración de la densidad por efecto del movimiento, concomitante con una alteración del volumen. Si buscamos ahora de harmonizar resultados con «conceptos intuitivos» interpretando la geometría, físicamente, tendríamos que admitir que «si el color es característica de densidad o de una densificación» abarcamos o englobamos *un grupo de fases debidas puramente al movimiento o relativismo.*

Mutatis mutandis, y aquí descubrimos una verdad: *sobrada razón tiene* aquel que asevera (por intuición) que *el color encierra una característica de movimiento atómico,* y esto nos hace recordar los clásicos experimentos de Maxwell y de Newton. Tenemos que hacer la salvedad que se ha empleado la palabra *átomo*, porque es muy familiar y conocida, pero que *en realidad deberíamos decir movimiento puntual.*

El lector que discurre sobre estos resultados, tan superficialmente tocados arriba, difícilmente podrá rehuir un fenómeno mental que hace presentir la proximidad de una *colosal solución* del problema material. Estamos al borde mismo — intuitivamente está resuelto, pero... hay que formular esa intuición. Hay que formular esa misteriosa *conexión métrica* y la «determinación métrica» sin ambigüedades. Esos *coeficientes asombrosos* de Einstein: los g_{ik} de

$$ds^2 = \sum_{ik}^{a} g_{ik} dx_i dx_k.$$

Después aparecerá el verdadero significado de estos coeficientes $g_{ik} = g_{ki}$, se verá que se trata de *dos propagaciones paralelas,* cuya consonancia tensorial toma la forma de una proyección escalar. Esta expresión es para nosotros la que encierra el misterio de la «densificación *ie*» la forma generalizada de distancia entre dos puntos, corregida «por sentido» (1). (Ver *Digresión sobre espacio métrico Pitagoreo).*

A Hermann Weyl corresponde el honor de haber sistematizado los conocimientos matemáticos que, partiendo de un pequeñísimo número de axiomas, rematan en la teoría de gravitación de Einstein. La obra de este autor titulada *Tiempo, Espacio, Materia,* es, podríamos decir, el *Einstein completo. Correspondería ser adoptada como texto en facultades de ciencia.*

Ricci y Levi-Civita son autores oficiales del cálculo tensorial y el último nombrado es creador del concepto magno : del *desplazamiento paralelo infinitesimal,* que ha tenido la virtud de solidificar la base de la obra de Riemann, modificada por Weyl y titulada *Geometría infinitesimal.*

Lie Engel continuó la obra del malogrado Galois, y gracias a su teoría de grupos continuos se ha podido *explorar al continuum* de Riemann (e Einstein hoy).

Minkowsky dividió el universo en «espacio y tiempo», es el padre de la geometría relativista, podríamos decir; pero *nunca tenemos que olvidar* a J. J. Sylvester, autor del *teoremita de los índices de inercia de las formas cuádricas ! ! !*

Boole, en 1841, descubrió las «invariantes» y Cayley con Sylvester desarrollaron su teoría. Contemporáneamente Gauss distinguía entre «medidas internas» y «medidas externas» sobre superficies y preparaba su *obra* sobre *curvatura!!!*

Siguió a Gauss el talento de Riemann cuya obra fué comprendida por un solo hombre anterior a A. Einstein, ése fué W. K. Clifford, en 1875.

Clifford *sólo comprendió* a Riemann — nada más. Falleció a los 34 años de edad.

(1) Lo que se ha dicho acerca de «color» ofrece un excelente ejemplo de «engaños fásicos», pues se ha de ver que color es la resultante de un «apilamiento» sobre el exterior de un *continuum* arbitrario de coeficiente cohesivo determinado — una parte componente de una composición que se propaga por «eferencia», mientras que *la otra componente recíproca,* penetra la materia y se propaga como *luz térmica.*

Einstein partió desde el punto alcanzado por Riemann (1) y... siguió adelante!!!

Repetimos que el lector general, que no domine las matemáticas, después de hojear las digresiones sobre repetición como base de la propagación, puede pasar al capítulo XIII y digresiones finales. Es posible que decida volver sobre sus pasos y decisiones y transite por la «dura calle» de Euclides.

CAPÍTULO PRIMERO

Determinantes

Invariantes. — Covariantes. — Contravariantes. — Concomitantes

Recordaremos, como de utilidad para el fin que perseguimos, los siguientes resultados conocidos, obtenidos por medio de las determinantes.

Multiplicación de determinantes. — Este teorema fundamental es, sin duda, el más importante de todos. Lo enunciaremos así : dada la determinante de un sistema de ecuaciones homogéneas lineales, si transformamos linealmente las variables, la determinante del sistema transformado es igual *a la determinante original multiplicada por la determinante de la transformación*, o *módulo de transformación.* Este módulo que es, claro está, una constante, puede en muchos casos ser tomado convencionalmente igual a la unidad. Recordemos fácilmente la demostración de este teorema como sigue :

$$\begin{array}{c} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \ \dots \ + a_n^1 x_n = 0 \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \ \dots \ + a_n^2 x_n = 0 \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ a_1^n x_1 + a_2^n x_2 + \ \dots \ + a_n^n x_n = 0 \end{array}$$

(1) Obras matemáticas sobre relativismo y cálculo tensorial : Herman Weyl; doctor August Kopff, profesor de la universidad de Heidelberg; A. S. Eddington, astrónomo; Alberto Einstein, varias obras; Levi-Civita; etc.

son n ecuaciones lineales de n variables que contienen n^2 coeficientes, que son los elementos de la determinante. Escribamos abreviadamente :

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_k^i x_k = 0$$

$$\Delta = | a_k^i | = \begin{vmatrix} a_1^1, a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ & \vdots & \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Pongamos :

$$x_1 = e_1^1 X_1 + e_2^1 X_2 + \dots + e_n^1 X_n$$

o abreviadamente :

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} e_k^i X_k \qquad i = 1, 2, \dots n$$

y sea

$$\Delta^1 = | e_k^i | \qquad \text{el módulo.}$$

La determinante del sistema transformado, es pues,

$$\Delta_T = | a_k^i | . | e_k^i | = \Delta . \Delta^1.$$

Si recordamos de la analítica la condición que deben llenar las coordenadas de cuatro puntos para que representen un plano, justamente :

$$\Delta = 0,$$

y generalizamos esta interpretación debidamente podemos decir que cuando

$$\Delta \neq 0$$

la determinante mide *la divergencia de la condición plana*; en tres dimensiones, esto significa *una magnitud de volumen.* Podemos admitir una magnitud volumétrica de n dimensiones y así dar carácter general al resultado. Hemos de hallar especial conveniencia en interpretar este resultado de esta manera. Sigue, pues, que la transformación lineal representa un cambio de unidades.

Una *invariante* es una función de los coeficientes de una ecuación homogenea que posee la propiedad recién señalada para producto de determinantes, a saber : una función de los coeficientes tal que cuan-

do se transforman linealmente las variables, *la nueva función es igual a la antigua multiplicada por una constante,* i. e., *el módulo de transformación.* Por ejemplo, la discriminante de la bilineal cuadrática

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$$

una transformación de (x, y) da :

$$AC - B^2 = M\,(ac - b^2)$$

y

$$M = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 \qquad \text{si} \qquad x = \alpha_1 X + \beta_1 Y, \text{ etc.}$$

En realidad la *invariante* es un caso particular de la *covariante.*

Diremos que las coordenadas de un punto son *cogredientes* con las coordenadas de otro punto si ambas se transforman por *el mismo* sistema de ecuaciones lineales de transformación. Serán *contragredientes* si se transforman por *lineales recíprocas.* El significado de *reciprocidad* aparece inmediatamente como sigue, si :

$$\begin{array}{l} x_1 = a_1{}^1X_1 + a_2{}^1X_2 + \ \dots \ + a_n{}^1X_n \\ x_2 = a_1{}^2X_1 + a_2{}^2X_2 + \ \dots \ + a_n{}^2X_n \\ \quad\vdots \\ x_n = a_1{}^nX_1 + a_2{}^nX_2 + \ \dots \ + a_n{}^nX_n \end{array}$$

son las ecuaciones de transformación y resolviéndolos, tendremos :

$$\begin{array}{l} \Delta X_1 = A_1{}^1x_1 + A_1{}^2x_2 + \ \dots \ + A_1{}^nx_n \\ \Delta X_2 = A_2{}^1x_1 + A_2{}^2x_2 + \ \dots \ + A_2{}^nx_n \\ \quad\vdots \\ \Delta X_n = A_n{}^1x_1 + A_n{}^2x_2 + \ \dots \ + A_n{}^nx_n \end{array}$$

en que Δ es la determinante de la transformación y $A_1{}^1$, $A_2{}^1$, ..., $A_n{}^n$ son «las menores» primeras obtenidas de Δ suprimiendo sucesivamente una línea y columna con intersección en $a_1{}^1$, $a_2{}^1$, ..., $a_n{}^n$ respectivamente. Estos sistemas de ecuaciones de transformación son *recíprocos,* o lo que es lo mismo : producen *transformaciones lineales que son recíprocas.*

Las coordenadas de dos puntos son *cogredientes* si ambas se transforman por *las mismas* ecuaciones lineales de transformación y son *contragredientes* si las de un punto se transforman por ecuaciones lineales que son las recíprocas de las ecuaciones lineales que transforman las coordenadas del otro punto.

Si tenemos en cuenta la regla elemental de ser *cero* el valor de una determinante con dos filas de elementos — o dos columnas — idénticos, i. e. :

$$a_2^1 A_1^1 + a_2^2 A_2^1 + \ \ldots \ + a_2^n A_n^1 = 0$$

$$a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 + \ \ldots \ + a_n^1 A_n^1 = \Delta$$

etc. etc.

vemos que una forma bilineal :

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 + \ \ldots \ + x_n \xi_n$$

en que los (ξ) se transforman por ecuaciones que son las recíprocas de las que transforman a los (x), resulta *inalterada por una transformación total de* x_i y ξ_i. Llámase *concomitante* a una ecuación homogénea de esta clase.

Si llamamos Δ^1 a la determinante cuyos elementos son *las menores primeras* A_1^1, A_2^1, ..., de Δ, tendremos la siguiente relación fácil de comprobar :

$$\Delta . \Delta^1 = \Delta^n ; \qquad \Delta^1 = \Delta^{n-1}$$

puesto que

$$\Delta . \Delta^1 = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ a_1^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1^1 & \ldots & A_n^1 \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ A_1^n & \ldots & A_n^n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^1 A_1^1 + \ldots & \ldots & a_1^1 A_1^n + a_2^1 A_2^n + \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^n A_1^1 + \ldots & \ldots & a_1^n A_1^n + a_2^n A_2^n + \ldots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \Delta & o & o & o & \ldots \\ o & \Delta & o & o & \ldots \\ o & o & \Delta & o & \ldots \\ . & . & . & . & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^n .$$

Además nos apercibimos que podemos escribir

$$A_1^1 = \frac{d\Delta}{da_1^1} \quad \dots$$

$$a_1^1 \frac{d\Delta}{da_1^1} + a_2^1 \frac{d\Delta}{da_2^1} + \dots + a_n^1 \frac{d\Delta}{da_n^1} = \Delta$$

etc., etc.

En realidad los coeficientes de la forma recíproca son $\frac{A_1^1}{\Delta}; \frac{A_2^1}{\Delta} \dots$ en los que $\frac{1}{\Delta}$ es factor común : el valor inverso del módulo.

Covariante es el nombre dado a una función derivada de otra, según una ley cualquiera, que *conserva su relación* después de una transformación lineal de coordenadas, lo cual implica *cogrediencia de variables.* Quiere decir que las variables se transforman por medio de *las mismas* ecuaciones de transformación.

Contravariante, es una función derivada de otra, según una ley cualquiera determinada, que *conserva su relación* después de ser transformadas las variables por *lineales recíprocas,* esto es : la original por un sistema de ecuaciones de transformación y la derivada especial por *un sistema recíproco.* Esto entraña la *contragrediencia* de las variables en una y otra función. Fácil es ver esto en los siguientes ejemplos.

Si $V(xy)$ es una binaria cualquiera — siempre se sobreentiende homogénea, — formemos la hessiana, tendremos :

$$\frac{d^2V}{dx^2} \cdot \frac{d^2V}{dy^2} - \left[\frac{d^2V}{dx \cdot dy}\right]^2$$

y si V se transforma en U cuando transformamos linealmente a (x, y), tendremos :

$$\frac{d^2U}{dx^2} \cdot \frac{d^2U}{dy^2} - \left[\frac{d^2U}{dxdy}\right]^2 = M \left\{ \frac{d^2V}{dx^2} \cdot \frac{d^2V}{dy^2} - \left[\frac{d^2V}{dxdy}\right]^2 \right\}$$

que revela una «ley invariante». La hessiana es *una covariante.*

Antes de seguir vamos a considerar la relación que existe entre las transformaciones lineales de funciones y las diferenciales : a saber entre $x, y, z, \dots$ y $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \dots \frac{d}{dz}, \dots$ Por ejemplo, supongamos las siguientes lineales de transformación :

$$x = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z$$
$$y = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z$$
$$z = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z$$

que resueltas reciprocamente dan :

$$\Delta X = A_1 x + A_2 y + A_3 z \qquad A_1 = \frac{d\Delta}{da_1}$$
$$\Delta Y = B_1 x + B_2 y + B_3 z \qquad \cdot$$
$$\Delta Z = C_1 x + C_2 y + C_3 z \qquad C_3 = \frac{d\Delta}{dc_3}$$

tenemos en seguida :

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dX} \cdot \frac{dX}{dx} + \frac{d}{dY} \cdot \frac{dY}{dx} + \frac{d}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dx}$$
$$= \frac{1}{\Delta} \left\{ A_1 \frac{d}{dX} + B_1 \frac{d}{dY} + C_1 \frac{d}{dZ} \right\}$$

y análogamente

$$\frac{d}{dy} = \frac{1}{\Delta} \left\{ A_2 \frac{d}{dX} + B_2 \frac{d}{dY} + C_2 \frac{d}{dZ} \right\}$$

etc., etc.,

que nos dice que

$$(x, y, z) \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right)$$

son *contragredientes* y se transforman por medio de *formas lineales recíprocas.*

Quiere decir, pues, que una lineal de la forma

$$x\frac{d}{dx} + y\frac{d}{dy} + z\frac{d}{dz},$$

que es la forma general de una «tangente» o «polar», es una *concomitante universal* y, como vimos ya, no se altera por una transformación total.

Si formamos la condición necesaria para que una recta sea tangente a una curva, expresada en la forma siguiente :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy$$

y damos *un punto* de la recta, esta tendrá la forma de la polar cuya intersección con la cónica nos da los puntos de contacto. Como se sabe. la solución es la cónica recíproca que se obtiene muy sencillamente bordando *la discriminante* con las coordenadas (ξ, η, ζ) contragredientes a (x, y, z) viz :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{vmatrix}$$

es la discriminante; la recíproca es, pues :

$$\begin{vmatrix} a & f & e & \xi \\ f & b & d & \eta \\ e & d & c & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & o \end{vmatrix} = (bc - d^2)\xi^2 + (ca - e^2)\eta^2 + (ab - f^2)\zeta^2 + \\ + 2(ef - ad)\eta\xi + \ldots$$

Esta cónica «recíproca es *una contravariante,* como es evidente, por definición, a saber : la condición que la recta

$$x\xi + y\eta + z\zeta$$

toque la cónica dada. y *esta condición siendo concomitante universal es inalterada por transformación total.*

Quiere decir que obtenemos *el mismo resultado formando la condición que la recta toque la cónica y en seguida transformando o transformando primeramente y después formando la condición que* $x\xi + \ldots$ *toque la cónica.* Y como (x, y, z) y (ξ, η, ζ) son *contragredientes* se transforman por lineales reciproeas. Así, pues :

$$\begin{vmatrix} a & f & e & \xi \\ f & b & d & \eta \\ e & d & c & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & o \end{vmatrix}$$

es una contravariante de la cónica

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2 \ldots$$

Recordemos ahora lo que es una *emanante.* Si x, y, z, ..., y x', y', z', ..., son variables *cogredientes* y substituimos en una función homogénea $x + \lambda x'$, $y + \lambda y'$, $z + \lambda z'$, ..., en vez de x, y, z, ..., respectivamente, obtendremos por desarrollo (Taylor) los coeficientes siguientes de indeterminada λ :

$$\left(x'\frac{d}{dx} + y'\frac{d}{dy} + \ldots\right)^p V$$

en general, que se denomina la «emanante» de grado p de la función V. Que es *una covariante, es evidente*, puesto que la emanante se compone de términos concomitantes y, por lo tanto, inalterables por transformación total, i. e. : x', y', ..., que son cogredientes con x, y, z, ..., y $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, ..., que son *contragredientes* (haciendo recordar el vector Nabla), etc. Esto es :

$$\left(x' \frac{d}{dx} + ...\right)^p = \mathrm{M}^{-p} \left\{ \mathrm{X}' \frac{d}{d\mathrm{X}} + ... \right\}^p$$

en que

$$\mathrm{M}^{-p} = \frac{1}{\mathrm{M}^p},$$

es el valor inverso del módulo de transformación elevado a una potencia p, etc. Repetimos que, cuando decimos que una función no es alterada por transformación lineal de sus variables, siempre se sobreentiende un factor constante : una potencia del módulo.

De las innumerables propiedades que existen y que se refieren a la relación entre variables cogredientes, contragredientes y funciones covariantes y contravariantes, citaremos las siguientes :

Emanantes, que ligan en cada término los x^1 con $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$, x'^p con $\frac{d^p\mathrm{V}}{dx^p}$, etc., y son *funciones covariantes.* Podemos considerar en éstas a las x^1, y^1, z^1, ..., *constantes* y después formar una *invariante del resultado.* Si en esta invariante volvemos a considerar variables a los x^1, y^1, ..., obtendremos una *covariante de la función* V *original.*

Esto es lo mismo que decir : si tenemos

$$ax^2 + cy^2 + 2bxy$$

que nos da la invariante

$$ac - b^2$$

podemos escribir *la covariante hessiana,*

$$\left\{ \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left(\frac{d}{dy}\right)^2 - \left(\frac{d^2}{dx \, . \, dy}\right)^2 \right\} \mathrm{V}$$

para lo cual no hay más que asimilar

$$ax^2 + cy^2 + 2bxy$$

a la emanante

$$\left(x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy}\right)^2 \mathrm{V}$$

que nos da

$$\left(x'^2 \frac{d^2}{dx^2} + y'^2 \frac{d^2}{dy^2} + 2x'y' \frac{d^2.}{dx\,.\,dy}\right) V$$

en que tomamos

$$a = \frac{d^2}{dx^2}, \qquad b = \frac{d^2}{dx\,.\,dy}, \qquad c = \frac{d^2}{dy^2}, \qquad \text{etc.}$$

En general, pues, si substituimos los símbolos $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}$, ..., teniendo en cuenta el exponente que corresponde a la homogeneidad, en *cualquier invariante* de emanante, obtendremos una covariante de la función matriz, y si formamos una nueva *invariante* de la última, etc., obtendremos, por lo tanto, *nuevas covariantes formando invariantes y después substituyendo símbolos Nabla* $\left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, ...,\right)$ etc.

Fácil es ver, en virtud de esto, que la relación entre coeficientes y variables en los términos de una función covariante es de *contragrediencia*. También toda Hessiana es una Jacobiana *de las derivadas de la función matriz,* etc.; así, pues, la Jacobiana es *una covariante.* Se puede demostrar esto directamente, si se tiene en cuenta el carácter *contragrediente* de los elementos de la J, y el teorema fundamental de multiplicación de determinantes. A saber si U = 0, V = 0, ..., será :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dU}{dx}, & \frac{dU}{dy} & \cdots \\ \frac{dV}{dx}, & \frac{dV}{dy} & \cdots \\ . & . & . \end{vmatrix}$$

Cuando x, y, z, ..., se transforman linealmente, las $\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}$, ..., se transforman por recíprocas y manifiestamente por el teorema de multiplicación de determinantes :

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{dX}, & \frac{dU}{dY} & \cdots \\ \frac{dV}{dX}, & \frac{dV}{dY} & \cdots \\ . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dU}{dx}, & \frac{dV}{dy} & \cdots \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} A_1, & A_2 & \cdots \\ B_1, & B_2 & \cdots \\ . & . & . \end{vmatrix}$$

en que A_1 = menor de Δ relativamente a a_1, etc.; llamando Δ' esta determinante recíproca tenemos, como se sabe :

$$\Delta' = \Delta^{n-1},$$

así, pues :

$$J_T = J_0 \Delta' = J_0 \Delta^{n-1} = M^{n-1} J_0$$

o sea *covariante.*

Podemos substituir, pues, en general, en una *función covariante* o *contravariante,* nuevas variables que son *cogredientes* con las que se cambian *sin alterar el carácter de la función.*

Terminaremos este rápido repaso con una reseña del teorema de Sylvester conocido por el de los «índices de inercia».

La *discriminante* de una cuádrica de n dimensiones es una *determinante simétrica,* cuya diagonal contiene, como *elementos, a los coeficientes de los términos cuadrados de la función dada.*

Si escribimos abreviadamente la cuádrica siguiente :

$$\sum_{ik}^{n} g_{ik} x_i x_k \qquad \text{en que} \qquad i, k = 1, 2, ..., n$$

entonces la diagonal de la discriminante contiene a los g_{ii} o g_{kk}.

Refresquemos nuestra analítica de tres dimensiones. Dada una ecuación de segundo grado en las variables (x, y, z), de cualquier forma, si la sometemos a una simple transformación lineal por *traslación,* obtenemos como coeficientes nuevos : los mismos antiguos en los términos de segundo grado y los derivados de la función relativamente a (x', y', z') respectivamente para los demás. La *eliminante de estos últimos coeficientes* es *precisamente la discriminante;* encierra, pues, la condición de homogeneidad, i. e. : la condición *de representar la cuádrica un cono.*

Si referimos una cuádrica a sus planos diametrales normales, desaparecen los términos bilineales y sólo quedan los cuadrados. Por otra parte, sabemos que podemos canonizar una cuádrica, convirtiendola en una suma de cuadrados de una infinidad de maneras, pues disponemos de mayor número de constantes que las necesarias para que *no haya degeneración.* Si una cuádrica ternaria $x^2 + y^2 + z^2$ se transforma linealmente, aparecen las *nueve constantes* que contiene implicitamente; mientras tanto la forma general sólo contiene seis, de suerte que disponemos de tres para imponer condiciones arbitrarias, etc. Hay una limitación : y es cuando intervienen términos *cuadrados negativos.* No es posible que podamos transformar una cuádrica en dos formas canónicas como las siguientes :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \\ x^2 + y^2 = u^2 - v^2 \end{cases}$$

ni necesita esto comentario. Descubrimos, desde luego, que *interviniendo términos negativos en la canónica Pitagórica se fija la naturaleza de la función;* sabemos que fluye de esto un método de clasificación elemental de cuádricas.

Si deseamos conocer la clase de normalización de una función multidimensional cuádrica, debemos *canonizarla* y contar los términos positivos y negativos, que supondremos sean r y s respectivamente. Conocidos éstos diremos que la cuádrica posee r dimensiones positivas y s negativas, *correspondiendo las dimensiones a direcciones normales.*

Hemos de ver que esto nos permite tomar como *sistema vectorial* coordenado un sistema de vectores normales $= r + s$, que llamaremos $p_1, p_2, \ldots, p_r$ y $q_1, q_2, \ldots, q_s$ tales que

$$(p_i p_k) = 0; \qquad i, k = 1, 2, \ldots, r;$$

y

$$(q_i q_k) = 0; \qquad i, k = 1, 2, \ldots, s;$$

pero que

$$(p_1 \cdot p_{r+1}) \neq 0 \qquad \text{y} \qquad (q_1 \cdot q_{s+1}) \neq 0,$$

entendiéndose «productos escalares» en los paréntesis.

Llamase $r + s$ los índices de inercia y J. J. Sylvester fué quien, a mediados del siglo pasado, dió el método de calcularlos. Nada puede ser más sencillo. Si :

$$V = a_1{}^1 x_1{}^2 + a_2{}^1 x_1 x_2 + a_3{}^1 x_1 x_3 + \ \ldots \ + a_k{}^i x_i x_k, \ldots$$

$$V = \sum_{ik=1}^{n} a_k{}^i x_i x_k$$

la discriminante será la determinante simétrica conocida :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1{}^1 & a_2{}^1 & a_3{}^1 & \ldots & a_n{}^1 \\ a_1{}^2 & a_2{}^2 & . & \ldots & a_n{}^2 \\ a_1{}^3 & a_2{}^3 & a_3{}^3 & \ldots & a_n{}^3 \\ . & . & a_4{}^4 & . & \\ . & . & & . & \\ . & . & & . & \\ a_1{}^n & & & & a_n{}^n \end{vmatrix}$$

en que

$$a_2{}^1 = a_1{}^2 \qquad \text{o sea} \qquad a_k{}^i = a_i{}^k$$

y la diagonal se compone de elementos $a_k{}^i$ en que

$$i = k; \qquad \text{i. e.,} \qquad a_i{}^i \qquad \text{o} \qquad a_k{}^k, \text{ etc.}$$

Si canonizamos obtendremos una *determinante discriminante reducida a su diagonal*, puesto que todos los demás elementos se anulan. Esta nueva determinante, claro está, es igual al, o tiene el mismo valor del antiguo, salvo un factor constante. Hagamos ahora la siguiente descomposición de V en dos funciones :

$$V = M + \lambda N$$

en que

$$N = x_1^2 + x_2^2 + \ \dots\ + x_n^2$$

$$M = \alpha_1^1 x_1^2 + \alpha_2^1 x_1 x_2 + \ \dots\ + \alpha_k^i x_i x_k + \ \dots$$

es evidente que V representará una cuádrica con soluciones comunes simultáneas de M y N. Hagamos una transformación *ortogonal* de coordenadas tal que la nueva

$$N = x_1^2 + x_2^2 + \ \dots\ + x_n^2 \qquad \text{(invariante)}$$

y la nueva M supondremos sea :

$$M = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ \dots\ + A_n x_n^2,$$

veamos ahora el efecto de este procedimiento sobre la discriminante de V. Por lo pronto vemos que esta discriminante se altera, en forma, por efecto de la descomposición en funciones M y N, de la siguiente manera, a saber :

$$V = M + \lambda N = 0$$

da una

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & & a_n^2 \\ a_1^3 & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_1^n & a_2^n & & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 + \lambda & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 + \lambda & & & . \\ . & . & \alpha_3^3 + \lambda & & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_1^n & . & . & & \alpha_n^n + \lambda \end{vmatrix}$$

y si llamamos Δ' esta nueva forma se tendrá después de *canonizar* :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 + \lambda & & \dots \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 + \lambda & \dots \\ . & . & \dots \\ . & . & \dots \\ . & . & \dots \\ . & . & \dots \\ . & . & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 + \lambda & o & o & o & \dots \\ o & A_2 + \lambda & & & \\ o & & A_3 + \lambda & & \\ o & & & . & \\ o & & & . & \\ o & & & . & \\ o & \dots & & & A_n + \lambda \end{vmatrix}$$

como es evidente por *invariación*.

Esto es :

$$\Delta' = (A_1 + \lambda)(A_2 + \lambda)(A_3 + \lambda) \ldots (A_n + \lambda),$$

lo cual, debidamente interpretado, nos da la solución. Los A_1, A_2, ..., A_n aparecen como raíces con signos contrarios de una ecuación de *n grado* en λ, i. e. :

$$\Delta' = 0.$$

Esta ecuación tiene todas sus raíces reales y aplicando uno cualquiera de los métodos usuales (Descartes, Sturm, Sylvester, etc.), descubriremos el número de raíces positivas y el número de raíces negativas, etc.

Este teorema es de una importancia trascendental y gracias al mismo pudo Minkowsky dividir al universo cuadridimensional en «espacio y tiempo» adoptando una forma cuadrática Pitagórica a tres dimensiones positivas (o negativas) y una dimensión negativa (o positiva) respectivamente; forma que representa en un espacio Newtoniano la ley invariante de la propagación de la luz.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2t^2 \qquad c = \text{velocidad luz},$$

si $c = 1$ y $t = x_0$ tendremos

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

que representa un cono cuadridimensional; con suprimir una dimensión espacial obtenemos un cono tridimensional con vértice en el origen. Este cono tiene dos napas, una dirigida hacia el futuro y otra hacia el pasado.

El cono degenera en plano en la mecánica de Newton, que considera $c = \infty$. El plano del presente : $t = 0$. Se ve, pues, que según la mecánica de Newton no hay «espacio muerto», pero según la de Einstein si lo hay : es el espacio excluído por las dos napas.

DIGRESIÓN 0.4

Una advertencia oportuna. Órdenes de magnitudes

Leibnitz ya explicó el significado de los diferentes órdenes de magnitudes, y fundó su cálculo infinitesimal sobre un concepto relativo a los mismos. Hay que insistir sobre este punto, de importancia transcendental.

Cuando no vemos una magnitud sobreviene una cierta incredulidad acerca de su existencia. Esto es natural, pero es fásico y erróneo. Lo que no existe es *el orden perceptible consciente de magnitud.* Miramos una casa de cerca y discernimos todos los detalles de su construcción: a medida que nos alejamos de la misma se van borrando estos detalles. ¿Cuándo no se ven, será porque ya no existen? Queda manifiesto el principio de Leibnitz, citado: *de órdenes diferentes de magnitudes.* En realidad esto no exigiría mayor explicación, pero sí ilustraciones. Veamos esto.

Nuestro universo es un *continuum* mayor puntual de cierta naturaleza determinada. Nosotros *no vemos los puntos* por aquello de «la casa», pero sabemos que *existen* o «allí están». No vemos el aire, y es muy posible que un pescado no vea el agua, pero «ahí está». Estos diferentes *continuums* se distinguen por «índices de cohesión» y diremos siempre que nuestro *continuum* mayor existe dentro de otro, cuyo orden es superior en una unidad al que corresponde *al finito nuestro.*

Comprendiendo bien esto, el lector se dará inmediata cuenta del hecho que nuestra invariante *c* de Einstein, o *velocidad de propagación de la luz,* que es nuestra velocidad límite, puede ser, en unidades planetarias, una magnitud insignificante para otro sér que existiere en el gran *continuum,* que contiene al *continuum* mayor, y que *viese las cosas en ese espacio mayor,* tal como *las vemos nosotros en el nuestro menor.*

Se comprende así cómo una velocidad que es *finita* en *un orden de magnitudes puede parecer infinita en otro orden de magnitud menor.* Esto es muy importante, y ha sido mal comprendido hasta *hoy día* mismo, debido a los «fenómenos fásicos» que todo ocultan.

Así se comprende que: un tiempo que es finito en un orden de existencia puede ser «una eternidad» o infinito en otro orden inferior. Más adelante se volverá matemáticamente sobre este punto, pero es necesario advertir que las matemáticas sólo sirven cuando «se ve», o cuando se domina filosóficamente la materia, y no sirven cuando *no se ve* o no se comprende (1).

(1) No es necesario reflexionar mucho para percibir el significado de esta diversidad de órdenes de magnitudes. Por ejemplo, el clásico tren en marcha y los postes de telégrafo al lado de la vía ofrecen una explicación — podemos fácilmente contar el número de postes telegráficos que pasan, pero no así los postes del alambrado que encierra la vía, menos aun las varillas del alambrado; por fin si miramos al suelo y pensamos en los «granos de arena», etc. se ve cómo

Tomemos ahora el caso de una linealización infinitesimal, que es un método de análisis de admirable potencia. Tratemos de ilustrar el significado de este principio puramente analítico. Por ejemplo, se puede elegir un fenómeno muy conocido de luminosidad: la difracción y considerar ese efecto de «proyección circular ó elíptica», etc., que se observa en un monte como efecto de la penetración del sol por los intersticios que dejan las hojas de los árboles entre sí. Esto es: la luz dibuja sobre el suelo una infinidad de círculos, elipses, etc. Este mismo efecto podrá observarse en una cámara obscura cuando prevalecen condiciones iguales y el fondo está fuera de foco. En ambos casos se *borran dimensionalidades, por simple cambio de orden de magnitudes.* Los intersticios entre las hojas carecen, en general, de formas circulares y si proyectamos sobre un plano *próximo a los mismos* esto *se revelará;* pero cuando el plano se aleja más allá de un determinado límite sobrevendrá el fenómeno arriba anotado. Ahora bien, si un *continuum* mayor se deformase de una manera continua y absolutamente arbitraria, *sin alterar su estructura, o densidad,* pasando de una configuración a otra totalmente distinta, un observador que contemplase el fenómeno desde el exterior se podrá figurar que está mirando «una nube». *No admitirá duda* sobre *las diferentes formas* que toman las nubes, quizás recuerde a Polonio y Hamleto. Supongamos ahora al observador en un punto interno del *continuum* mayor o nube, *y fijo al punto.* Añadiremos otra condición: que sólo concentra su atención sobre lo que pasa en su más inmediata vecindad, esto es: *lo infinitamente próximo.* ¿Qué será lo que observa cuando la nube se deforma *arbitraria* y *continuamente* pasando por todas las formas caprichosas imaginables? Solamente observará *una sola y única cosa invariante: rotación al rededor del punto fijo que ocupa.* A todas esas «diferentes formas» *corresponderá un sólo y único fenómeno de rotación.* Aquí tenemos, pues, una *linealización infinitesimal.* Matemáticamente se dice: a transformaciones lineales infinitesimales corresponden transformaciones generales arbitrarias de coordenadas en un *continuum* puntual. No hay más que comparar este caso con el luminoso para comprender el significado de «diferentes órdenes de magnitudes».

«los órdenes de magnitudes se agrupan naturalmente» diferenciándose por «indeterminaciones, que en uno corresponden a determinaciones en el orden inmediato». Este es el principio básico fundamental en toda la *fenomenología perceptible* de la naturaleza. Este principio es básico, y consecuencia directa del proceso de repetición, como se verá.

Se ve, pues, que cuando se relacionan dos órdenes diferentes de magnitudes: *a una determinación física en un orden corresponde una indeterminación en el otro orden superior.* Esto tiene una trascendental importancia, como se ha dicho, y señalaremos una aplicación, solamente en forma superficial. Una percepción consciente se produce en virtud de un fenómeno de « rotaciones focalizadas » en un punto de nuestro cerebro; estas rotaciones afectan elementos infinitesimales y se propagan por medio de una cierta « eferencia » a determinadas zonas de nuestro *continuum* corpóreo humano. Pues bien, a estas rotaciones corresponden deformaciones continuas arbitrarias que son contracciones y dilataciones musculares integrales, etc. Decimos que *la voluntad* reside precisamente en la *indeterminación* que liga *un orden de magnitud con el otro orden inmediato de magnitud,* y decimos que ejercemos un *acto de voluntad* cuando *destruímos* la *indeterminación.* Pero hay que observar con cuidado que este « acto de voluntad » es *infinitesimal* y, por lo tanto, *no es conscientemente perceptible.* En esto reside *el error* de la *libertad* atribuída a *la voluntad;* no existe en realidad la tal libertad. Cuando se discurre sobre esto se ve que la *teoría de Freud* tiene visos de « fundamento científico » y cobra mayor importancia. Esta teoría se impone.

Sintéticamente escribiremos ahora cuatro fenómenos que pertenecen a cuatro órdenes diferentes de magnitudes, siendo los cuatro de una misma, única, naturaleza: *repetición pura* :

1° Gravitación obscura;

2° Gravitación luminosa;

3° Gravitación térmica;

4° Gravitación cohesiva material.

Aquí tenemos cuatro fenómenos conscientes o cerebrales en cuatro órdenes de magnitudes. Oportunamente se demostrará cómo se pasa de una a otra por medio de « apilamientos » y composiciones « recíprocas ». Cuando se focaliza la gravitación obscura sobreviene la luminosa y cuando se resiste ésta sobreviene la conducción calorífica, etc., por medio de composiciones tensoriales; sigue a ésta la gravitación cohesiva como límite inverso de la luminosa, que percibimos con el tacto y por discontinuidad.

Por si todavía quedara alguna duda acerca de este punto trascendental podemos citar un ejemplo práctico más en pos de la claridad. Cuando un viajero cruza el mar, en ningún momento deja de experimentar « la condición plana » de la superficie sobre la cual navega el barco. Para obtener una idea de esfericidad tiene que trascender el

orden de magnitud del barco y su inmediata vecindad y poner atención en el horizonte, etc. Pues bien, no hay más que figurarse mentalmente que «la tierra podría variar de radio *ad infinitum* sin que esto produjera alteración en esa «condición plana» elemental señalada. Hay un límite inferior a esta variación de radio impuesta por *el orden de magnitud del casco,* y cuando se ha llegado a éste se puede aun recurrir a *un bote* para obtener una condición elemental plana, quedando la tierra reducida al tamaño de una gran pelota. Pero no es necesario que la tierra *conserve su esfericidad, la condición elemental plana* subsistirá con *cualquier forma* si la *deformación es continua* y no hay *contorsión,* como se sabe. Se descubre, pues, que a una determinación «plana» en un orden de magnitud corresponde una indeterminación en el orden inmediato superior.

Nuestro Universo es un *continuum* de Repetición. Nuestras percepciones arrancan desde «el punto límite», o cero, y sólo es el *orden consciente* de éstas que es limitado. ¡Percepción continua!

No existe, pues, *geometría abstracta.*

CAPÍTULO SEGUNDO

Espacio euclideano

Adoptamos el método del profesor H. Weyl. Nos concierne el espacio plano euclideano y supondremos al lector familiarizado con los elementos del cálculo tensorial corriente.

La característica del espacio euclideano es su generación paramétrica plana. Quiere decir, que en este espacio es posible obtener dos posiciones congruentes de un sistema o cuerpo mediante una *traslación rectilínea arbitraria.* Matemáticamente esto se expresa diciendo que un espacio euclideano plano es aquel que comprende *en el grupo de transformaciones congruentes posibles al grupo de traslaciones rectilíneas.*

Una traslación rectilínea es un movimiento que afecta *de la misma manera a todos los puntos de un sistema* y se expresa geométricamente por medio de *un vector.*

Cuando decimos que las traslaciones rectilíneas forman un «grupo», queremos dar a entender que poseen la propiedad matemática de grupo y que, por lo tanto, a toda traslación corresponde una inver-

sa que la anula y a dos traslaciones consecutivas corresponde una « contracta » directa i. e. :

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0; \qquad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}, \text{ etc.},$$

Si n es un número cualquiera tendremos para dos vectores (traslaciones) **a**, **b** :

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}; \qquad n(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = n\mathbf{a} + n\mathbf{b}$$

y si **c** es otra traslación :

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}, \text{ etc.},$$

y si m y n son dos números cualesquiera :

$$(m + n)\,\mathbf{a} = (m\mathbf{a}) + (n\mathbf{a}) \qquad \text{y} \qquad m\,(n\mathbf{a}) = n\,(m\mathbf{a}) = mn\mathbf{a}.$$

Concibiendo a un vector determinado por dos puntos A y B, i. e. :

$$\overline{AB} = \mathbf{a}, \text{ etc.},$$

podemos extender lo dicho a este caso.

Adoptando el método seguido por Grassmann (1844) con las variantes introducidas por H. Weyl se desarrolla fácilmente la geometría afín en el espacio euclideano, que descansa completamente sobre *el principio de ser la traslación una transformación congruente que distingue a este espacio de una manera única y exclusiva entre todos los espacios paramétricos posibles.*

Resulta, pues, que un espacio *plano* euclideano es un concepto que guarda, relativamente a un espacio *curvo,* la misma relación que una línea recta a una línea curva gaussa, o que un plano a una superficie curva gaussa. Así como en general no es posible trazar sobre una superficie curva una línea recta, tampoco es posible en un espacio curvo trazar un plano. Hemos de ver más adelante, cuando tratemos la geometría riemeniana, cómo se puede relacionar un espacio amorfo con uno plano euclideano afín. Repetimos que la característica especial de un espacio plano euclideano es : *la traslación rectilínea* como *trasformación congruente. Dinámicamente* este espacio posee la propiedad newtoniana conocida bajo el nombre de « espacio libre ». *En este espacio plano no obran fuerzas y los cuerpos materiales se comportan libremente,* ligados al *campo* por la conocida ley magistral newtoniana de *inercia.*

La *traslación rectilínea* es, pues, *característica de un espacio libre newtoniano,* siéndolo a la vez del *espacio plano euclideano.* Vamos,

pues, entreviendo que existe en « la mecánica » una correspondencia exacta de propiedades, vg., geométricas y físicas. Esto nos hace pensar que así como el espacio euclideano aparece geométricamente como un caso especialísimo de espacios amorfos o curvos, habrá también de aparecer la dinámica de dicho espacio como caso especialísimo de la dinámica de un espacio general. Efectivamente, esto es exacto. El lector, progresivamente, lo palpará. Kinemáticamente *una traslación rectilínea* caracteriza un movimiento uniforme, i. e., constante. En forma concisa : *una traslación* es un movimiento constante, por ejemplo : constancia de velocidad y constancia de dirección. *Es un vector.*

Todos los puntos de un cuerpo *son iguales* relativamente a los efectos de una traslación. Nada distingue un punto de otro.

Si por medio de una traslación el punto P del cuerpo pasa a la posición P′ diremos que P y P′ son puntos correspondientes. Si ahora por medio de una segunda traslación P y P′ pasan a ser P_1, P_1' y luego a otra posición P_2, P_2', etc., podemos pasar de la posición inicial P a la posición final P_n' por una traslación directa *conservando la congruencia* y podemos substituir cualquier traslación intermedia *sin afectar la congruencia.* Es de esta manera kinemática que más claramente aparece el carácter « grupal » de *la traslación rectilínea* como trasformación congruente del espacio euclideano.

La geometría afín del espacio euclideano se funda sobre *la traslación como forma de transformación.* Esto es lo mismo que decir : el espacio afín euclideano es *el espacio de las transformaciones lineales.*

Kinemáticamente podríamos haber llegado a este mismo resultado puesto que sabemos, por la mecánica clásica, que en un espacio newtoniano libre los cuerpos guardan reposo o *se trasladan uniformemente unos relativamente a otros ;* lo cual implica *un cuerpo de referencia desde* el cual el observador nota el movimiento uniforme o reposo de los demás. Si cambiáramos el cuerpo de referencia, el espacio conserva su carácter libre; como es evidente, quiere decir, que relativamente al nuevo cuerpo los demás se moverán uniformemente : sólo habrán cambiado de *velocidad constante y de dirección de movimiento.* Este cambio se logra por una trasformación lineal de coordenadas, como sabemos. Digamos, pues : el espacio afín euclideano o el libre newtoniano es el *espacio de las transformaciones lineales.* Esta es otra correspondencia entre geometría y física.

Falta ahora distinguir entre el concepto de *congruencia afín* y congruencia en el sentido de la geometría general. Esta última siendo caso particular de la anterior, i. e., lo que vulgarmente comprendemos

por igualdad o identidad. Dos figuras son afines si a cada punto P corresponde un punto P′, a cada vector **a** un vector **a**′ y a un **a** + **b** un **a**′ + **b**′ : a un λ**a** un λ**a**′ : si direcciones paralelas tienen correspondientes direcciones paralelas, etc. En geometría afín, dos figuras así relacionadas *son idénticas,* puesto que no hay cómo distinguir entre los puntos de uno y otro, i. e., no hay propiedad que posea una figura que no posea la otra afín. Vemos, pues, que la identidad o congruencia geométrica general es un simple caso particular de la congruencia afín.

Podemos desarrollar una geometría afín basándonos sobre « traslaciones rectilíneas », lo vamos a demostrar brevemente.

Si X representa una traslación y si ξ es un número real y e un vector arbitrario determinado :

$$X = \xi_1 e_1$$

representa exactamente, y sin ambigüedad, a la traslación X en términos del vector coordenado e_1 mediante la abscisa, u componente ξ_1.

Si a ξ damos todos los valores reales posibles, el extremo P de X engendrará una línea recta con dirección e_1, o sea, un espacio de una dimensión.

Podemos, pues, expresar la magnitud de un vector X = una traslación por medio de una componente ξ y un vector básico e_1. Al mismo tiempo podemos fijar la posición de un punto P por medio de una abscisa ξ_1, que escribiremos x_1 para diferenciar, y un vector e_1. *Sobreentendido que nuestro espacio es unidimensional y representado por la recta* e_1. Que una traslación X en este espacio de una dimensión es igual a cualquier otra traslación de igual magnitud X quiere decir que es lo mismo elegir un punto O como otro O′ de la recta como origen : todos son idénticos, i. e., la recta, respectivamente espacio, es homogénea. Vemos, en consecuencia, que si cambiamos *ad libitum* el origen y hacemos variar a ξ_1 como queda dicho, siempre tendremos el mismo resultado : la multiplicidad vectorial o puntual unidimensional caracterizada por e_1.

Supongamos ahora que e_1 y e_2 representan dos vectores básicos con diferentes direcciones. Será imposible de efectuar medidas sobre uno de éstos que comprenda medidas sobre el otro. Así, pues, si X = una traslación y

$$X = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$$

y damos a ξ_1 y ξ_2 todos los valores reales posibles resulta : que la recta dirigida e_1 se trasladará a lo largo de la recta dirigida e_2, recorriendo

uno por uno, todos sus infinitos puntos, i. e., un espacio de dos dimensiones o un plano.

Si

$$X = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \ \ldots \ + \xi_n e_n$$

y damos a los (ξ_i) todos los valores reales posibles obtendremos un espacio de *n dimensiones*, i. e., *una multiplicidad vectorial, o puntual, de n dimensiones*.

Esto es:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \qquad \text{vectorial}$$

$$\overline{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad \text{puntual.}$$

¿Cómo podrá escapar la atención del lector que se trata de formas lineales?

La característica especial de estas formas es que: para que $X = 0$ tiene que ser cada

$$\xi_i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

por separado.

Los e_i son vectores básicos determinados y, por lo tanto, de magnitud : *constantes*.

Si X e Y son dos traslaciones y si L indica una forma lineal arbitraria :

$$L(X + Y) = L(X) + L(Y)$$

$$L(X) = \xi_1 L(e_1) + \xi_2 L(e_2) + \ \ldots \ + \xi_n L(e_n)$$

y si ponemos :

$$L(e_1) = \alpha_1$$

tendremos

$$L(X) = \xi_1 \alpha_1 + \xi_2 \alpha_2 + \ \ldots \ + \xi_n \alpha_n$$

en que la condición de linealización es que para $L(X) = 0$ tendrá que ser

$$\xi_1 = \xi_2 = \ \ldots \ = \xi_n = 0$$

separadamente.

Inversamente $L_1, L_2, \ldots, L_n$ serán formas lineales independientes si *no es posible* hallar un factor λ_i para el cual

$$\lambda_1 L_1(X) + \lambda_2 L_2(X) + \ \ldots \ + \lambda_n L_n(X) = 0$$

excepto :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ \ldots \ = \lambda_n = 0.$$

Esto es para

$$\lambda_i = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Está a la vista, pues, que podemos representar una traslación cualquiera X por medio de sus componentes ξ_i en un sistema vectorial coordenado e_i; podemos representar ún punto P, extremo del vector $\overline{OP} = X$ por medio de sus coordenadas x_i en un sistema vectorial coordenado e_i situado en un punto *origen* O, i. e., punto de emergencia de los vectores básicos e_i.

La representación se efectúa mediante una forma lineal de términos lineales independientes, y es única, exclusiva y no admite ambigüedad. A toda traslación X de componentes ξ_i corresponde en el sistema coordenado (e_i):

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i.$$

Todo punto P se representa en el sistema $(0e_1, e_2, ..., e_n)$:

$$\overline{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Si suponemos que los ξ_i varían entre $\xi_i = 0$ y $\xi_i = 1$, tomando todos los valores intermedios, obtendremos *un paralelepípedo vectorial de n dimensiones,* etc.

Siendo homogéneas las formas lineales se aplican todas las propiedades conocidas de las mismas.

Además, es preciso observar que en una multiplicidad vectorial de *n dimensiones* existen *n vectores que son linealmente independientes* y que todo $(n+1)$ vector ya no lo es; la ecuación lineal misma lo está diciendo. Si multiplicamos una forma por un factor numérico, o si sumamos vectores entre sí *no alteramos la naturaleza de la multiplicidad,* i. e., el resultado de estas operaciones será siempre *un vector de la multiplicidad,* o un punto de la misma.

CAPÍTULO TERCERO

Transformaciones lineales

Siendo homogéneo el espacio plano euclideano será imposible distinguir un punto de otro, en el mismo, por una propiedad especial.

Todos los puntos son iguales. Es exactamente lo mismo elegir uno que otro como origen del sistema vectorial coordenado (e_i).

Obtendremos exactamente el mismo resultado engendrando la multiplicidad vectorial o puntual con punto de emergencia en O como en otro O' : *se repetirá la multiplicidad* cuando han sido producidos todos los vectores o puntos.

Expresando matemáticamente esto tendremos :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

en un sistema O, y, si elegimos un nuevo sistema $\bar{e}_i$ de vectores básicos tal que :

$$\bar{e}_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k e_k \qquad i = 1, 2, ..., n$$

en que los α_i^k son constantes : coeficientes numerados con índices para indicar su posición en la forma lineal, manifiestamente; la traslación X tiene un valor que es *independiente del sistema especial de representación* y en virtud de esta *invariación* será :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i \bar{e}_i$$

de aquí por simple mecanismo de cálculo :

$$X = \sum_{i}^{n} \xi_i e_i = \sum_{i}^{n} \bar{\xi}_i \bar{e}_i = \sum_{i}^{n} \bar{\xi}_i \sum_{k}^{n} \alpha_i^k e_k = \sum_{i}^{n} e_i \sum_{k}^{n} \bar{\xi}_k \cdot \alpha_i^k$$

y por lo tanto :

$$\xi_i = \sum_{k}^{n} \alpha_i^k \bar{\xi}_k.$$

Tenemos pues :

$$X = \sum_{i}^{n} \xi_i e_i = \sum_{i}^{n} \bar{\xi}_i \bar{e}_i$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}_i &= \sum_{k}^{n} \alpha_i^k e_k \\ \xi_i &= \sum_{k}^{n} \alpha_i^k \bar{\xi}_k \end{aligned} \right\} \qquad (A)$$

desde ya percibimos que ξ_i y e_i se transforman *por lineales recíprocas*, lo cual acusa una *contragrediencia* entre *componentes* y *vectores básicos*, que explica inmediatamente *la invariación de la traslación* X.

La condición necesaria de forma lineal independiente es, manifiestamente, que el determinante

$$|\alpha_k^i| \neq 0.$$

Puesto que si

$$|\alpha_k^i| = 0,$$

existiría una solución simultánea para las *n ecuaciones* lineales

$$\bar{e}_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k e_k, \qquad \text{etc.}$$

Si $\overline{OP} = X$ fija la posición de un punto P y

$$\overline{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

cambiando al origen O′ y sistema $(\bar{e}_i)$, siendo:

$$\overline{OO'} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n$$

y

$$\bar{e}_i = \sum_{k}^{n} \alpha_k^i e_k$$

$$|\alpha_k^i| \neq 0$$

será:

$$\overline{O'P} + \overline{OO'} = \overline{OP}$$

$$\overline{OP} - \overline{OO'} = \overline{O'P}$$

La transformación es idéntica a la vectorial de traslación X añadiendo los términos debidos al cambio OO′, así pues:

$$x_i = \sum_{k}^{n} \alpha_k^i \bar{x}_k + a_i \qquad (1)$$

$$x_i - a_i = \sum_{k}^{n} \alpha_k^i \bar{x}_k. \qquad (2)$$

La forma (2) devuelve la homogeneidad a la ecuación gracias a la solución a_i, que corresponde al nuevo origen.

Subsiste, como es natural, la misma contragrediencia entre los (x_i) y los (e_i), etc.

Estos resultados tienen una interpretación especial de gran importancia, en el sentido de correspondencias afines. De la misma manera que podemos concebir un cambio de sistema coordenado vectorial po-

demos suponer una correspondencia afín dentro de un sistema coordenado determinado. Esto es, si dentro de un sistema $(Oe, e_2, ..., e_i)$ hacemos corresponder a un punto P otro P′, a un vector **a** otro **a**′ tal que a **a** + **b** corresponde **a**′ + **b**′ y a λ**a** corresponde λ**a**′, etc., y al sistema $(Oe_1, e_2, ..., e_n)$ corresponde el sistema $(O'e', e'_2, ..., e_n')$, entonces manifiestamente a

$$X = \sum_i^n \xi_i e_i$$

corresponderá

$$X' = \sum_i^n \xi_i e_i'.$$

y si ξ_i' son las componentes *transformadas* que corresponden a *las* ξ^i, tendremos, si

$$e_i' = \sum_k^n \alpha_k{}^i e_k$$

$$\xi_i' = \sum_k^n \alpha_k{}^i \xi_k$$

y

$$x_i' = \sum_k^n \alpha_k{}^i x_k + a_i.$$

Vectores linealmente independientes se transforman por afinidad en vectores linealmente independientes, una multiplicidad de h dimensiones en otra de h dimensiones, paralelas en paralelas, etc.

Brevemente, observamos en los $(\alpha^i{}_k)$ las componentes de una matriz A de transformación, que hace corresponder un vector X a otro arbitrario X′ en el sistema.

En general, el sistema vectorial básico de los vectores (e_i) se elige de manera que $e_i = 1$, en magnitud, i. e., vectores de magnitud unitaria.

El lector bien sabe que dos ecuaciones lineales homogéneas se suman con simplemente *sumar coeficientes correspondientes.*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ ... \ + a_nx_n = 0$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \ ... \ + b_nx_n = 0$$

$$\sum_{i=1}^n a_ix_i + \sum b_ix_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)\, x_i = 0.$$

Además:

$$L(x + y) = L(x) + L(y)$$

$$mL(x) + nL(y) = L(mx) + L(ny).$$

Si tenemos :

$$(1) \ldots a_1x_1 + a_2x_2 + \ \ldots \ + a_nx_n = \alpha$$

no homogénea — si x_1' x_2', ..., es un sistema de soluciones de (1) tendremos :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ \ldots \ + a_nx_n = \alpha$$

$$a_1x_1' + a_2x_2' + \ \ldots \ + a_nx_n' = \alpha$$

$$a_1(x_1 - x_1') + a_2(x_2 - x_2') + \ \ldots \ + a_n(x_n - x_n') = 0$$

en que podemos concebir que $(x_1 - x_1')$ son *componentes de un vector determinado* por los dos puntos $(x_1'$ x_2', ..., $x'_n)$ y $(x_1$ x_2, ..., $\alpha_n)$, lo cual explica perfectamente la diferencia entre formas puntuales vectoriales y formas vectoriales.

Todas las correspondencias afines lineales son posibles y así podemos hacer corresponder a un vector de componentes (ξ_i) cualquier forma lineal independiente en un sistema arbitrario de vectores básicos. Los (ξ_i) siendo formas lineales a su vez.

Pero no basta la geometría afín para la determinación completa de magnitudes en el espacio plano euclideano. Es insuficiente la propiedad de poderse comparar distancias en una misma dirección por medio de traslaciones o transformaciones afines. Falta dotar a este espacio de la posibilidad matemática de comparación de distancias arbitrarias con direcciones arbitrarias. Falta el « campo métrico » o « espacio métrico ».

Con una eficiencia que es admirable, desde todo punto de vista, se logra esto mediante el principio de la « proyección ». Simplemente con el concepto del « producto escalar ».

Entramos forzosamente a la consideración de las formas bilineales como resultado del « producto escalar » de *dos vectores* o dos traslaciones. Si :

$$X = \sum_i^n \xi_i e_i$$

$$Y = \sum_i^n \eta_i e_i$$

$$(XY) = Q(XY) = \sum_{ik}^n \alpha_k{}^i \xi_i \eta_k$$

empleamos la notación alemana como la más práctica, sencilla y conveniente.

$$Q(XY) = (XY) = |X|\,|Y| \cos \sphericalangle XY,$$

en que $|X|$ e $|Y|$, respectivamente, son *magnitudes escalares*.

Las formas bilineales presentan las particularidades siguientes : ser o no ser simétricas.

$$\sum_{ik}^{n} \alpha^{ki} \xi_i \eta^k$$

en que

$$\alpha_k^i = \alpha_i^k$$

o

$$\alpha_k^i \neq \alpha_i^k,$$

siendo naturalmente

$$| \alpha_k^i | \neq 0$$

ser levo simétricas o :

$$a_k^i = - a_i^k.$$

Una forma asimétrica puede fácilmente convertirse en simétrica con aplicar el álgebra elemental a la forma. Por ejemplo :

Q (XY) siendo asimétrica, será

$$\frac{1}{2} \left\{ Q(XY) + Q(YX) \right\}$$

simétrica, etc.

Si $X = Y$ tenemos una forma cuadrática

$$(XX) = Q(X) = \sum_{ik}^{n} \alpha_k^i \xi^i \xi^k.$$

A toda forma bilineal simétrica corresponde una, y una sola, forma cuadrática. Una misma forma cuadrática no puede derivar de dos formas bilineales simétricas diferentes. Esto es evidente y se ve con simplemente inspeccionar una forma pitagórica cualquiera.

Cuando

$$Q(x) = (xx) = \sum_{ik}^{n} \alpha_k^i \xi^i \xi^k > 0$$

para toda traslación $x \neq 0$ se dice que $Q(x)$ es una forma cuadrática *definida* positiva Si $Q(x) < 0$ se dice que es *indefinida.*

$Q(X) = X^2 =$ *cuadrado del vector* X . $(XY) = Q(XY) =$ producto escalar de X por Y es manifiestamente una forma bilineal simétrica, i. e. :

$$(XY) = (YX); \qquad m(X \,.\, Y) = (mX \,.\, Y) = (X \,.\, mY)$$

$$m(X \,.\, Y) = (mY \,.\, X), \text{ etc.}$$

Si e es un vector de magnitud unitaria tendremos evidentemente :

$$Q(e) = (e \,.\, e) = 1.$$

Ligamos el campo métrico con el espacio plano afín euclideano de la manera más sencilla y completa, con simplemente especificar que: una trasformación afín, que convierte al vector X en el vector X', será *una transformación congruente* si se realiza:

$$Q(X) = Q(X').$$

Nada más.

Quiere decir que si X e Y corresponden á X' e Y' tendrá que ser:

$$Q(X) = Q(X')$$

$$Q(Y) = Q(Y')$$

$$Q(XY) = Q(X'Y')$$

Fácilmente: si **a** y **b** son dos vectores unitarios cualesquiera, y θ es el ángulo entre sus direcciones:

$$Q(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \cos\theta$$

si **a** y **b** son arbitrarios tendremos, como se sabe, del cálculo vectorial elemental:

$$\cos\theta = \frac{Q(\mathbf{ab})}{\sqrt{Q(\mathbf{aa})\,Q(\mathbf{bb})}}$$

si **a** es perpendicular a **b** será, pues,

$$Q(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0.$$

Fácil es ver que un vector X será igual a otro Y si se tiene

$$Q(X) = Q(Y).$$

Como magnitud de un vector se elige la raíz cuadrada de Q (X).

Si e_1, e_2 y e_3 son tres vectores básicos unitarios y

$$X = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$$

proyectando sobre cada vector básico sucesivamente

$$(Xe_1) = \xi_1 (e_1 e_1) + \xi_2 (e_2 e_1) + \xi_3 (e_3 e_1)$$

si e_2 es perpendicular a e_1, y e_3 perpendicular a e_1, tendremos un sistema normal cartesiano así:

$$(Xe_1) = \xi_1; \qquad (e_2 e_1) = (e_3 e_1) = 0$$

$$(Xe_2) = \xi_2; \qquad (Xe_3) = \xi_3,$$

lo cual nos da el significado de las componentes (ξ_1, ξ_2, ξ_3) de la traslación X *en el campo o espacio métrico.*

En general un sistema cartesiano de coordenadas es un sistema vectorial normal y se distingue facilmente. Si

$$X = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$$

$$(X \,.\, X) = \xi_1^2 (e_1 e_1) + \xi_1 \xi_2 (e_1 e_2) + \ \ldots \ + \xi_2^2 (e_2 e_2) + \ \ldots \ + \xi_3^2 (e_3 e_3),$$

y si $e_1 \perp$ a $e_2 \perp$ a e_3, será :

$$(XX) = \xi_1^2 (e_1 e_1) + \xi_2^2 (e_2 e_2) + \xi_3^2 (e_3 e_3),$$

si llamamos

$$\varepsilon_i = (e_i e_i) = \pm 1$$

tendremos en general :

$$(XX) = \sum_i^n \varepsilon_i \xi_i^2 \qquad \text{si} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

en el caso cartesiano que nos ocupa tenemos :

$$Q(X) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots \xi_n^2$$

en que deducimos fácilmente la condición de la expresión :

$$X = \sum_i^n \xi^i e^i$$

$$Q(XX) = \sum_{ik}^n (e_i e_k) \xi_i \xi_k$$

tendrá pues que tenerse :

$$Q(e^i e^k) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}.$$

El lector recordará ahora el teorema de Sylvester sobre índices de inercia y aplicará el mismo al caso que nos ocupa. Deducimos en consecuencia que la forma cuadrática

$$Q(X) = \sum_{ik}^n g_{ik} \xi^i \xi^k$$

$$Q(e_i e_k) = g_{ik}$$

y en el caso de sistema cartesiano:

$$Q(e^i e^k) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ \pm 1 & i = k \end{cases}$$

de donde inferimos la naturaleza del espacio métrico, sin ambigüedades, etc.

Si Q (X) > 0 fácilmente hallamos para

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = \xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \ldots \xi_n'^2$$

que si

$$\xi_i' = \sum_k^n \alpha_{ik}\xi_k$$

y

$$\xi_r' = \sum_k^n \alpha_{rk}\xi_k$$

forzosamente será

$$\xi_i'\xi_r' = \sum_k \alpha_{ik} \cdot \alpha_{rk}\xi_k \cdot \xi_k.$$

Y, por lo tanto, la condición de ortogonalidad es:

$$\sum_k \alpha_{ik} \cdot \alpha_{rk} = \begin{Bmatrix} 0 & i \neq r \\ 1 & i = r \end{Bmatrix}.$$

La simetría exige que:

$$\xi_i' = \sum_k^n \alpha_{ik}\xi_k \qquad \xi_i = \sum_k^n \alpha_{ki}\xi_k'$$

o sea que α_{ik} y α_{ki} sean *términos recíprocos.* Ya sabemos de determinantes que si:

$$| a_{ik} | = \Delta$$

el módulo es

$$a_{ki} = \frac{\frac{d\Delta}{da_{ik}}}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{da_{ik}}$$

de aquí, sumando:

$$a_{ki} \cdot a_{ik} = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{d\Delta}{da_{ik}} a_{ik} = 1,$$

pues la suma (pág. 20)

$$\frac{d\Delta}{da_{ik}} a_{ik} = \Delta.$$

Si llamamos

$$\Delta' = | a_{ki} |$$

determinante recíproco de Δ tendremos:

$$\Delta = \Delta'$$

por efecto de ortogonalidad y también

$$\Delta \, . \, \Delta' = 1$$

lo cual implica que

$$\Delta = \pm 1.$$

Seguramente el lector no necesitará que se diga que los elementos de $\Delta \, . \, \Delta'$ son precisamente los que constituyen la condición de la ortogonalidad escritos, etc.

La transformación ortogonal, siendo congruente, admite en Δ un doble signo; la explicación está en la simetría directa o invertida por reflexiones.

Deducimos en consecuencia que por suma:

$$a_{ik} \, . \, a_{ki} = 1 = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{d\Delta}{da_{ik}} a_{ik}$$

esto es:

$$a_{ki} = \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{da_{ik}} = \frac{d\Delta}{da_{ik}}$$

pues $\Delta = 1$, si escribimos como es usual a^{ik} en vez de $\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{d\Delta}{da_{ik}}$ para indicar un término de la *forma lineal recíproca correspondiente* a a_{ik}, vemos que la suma es:

$$a_{ik} a^{ik} = 1.$$

Esta notación es la que hemos de usar de acuerdo con la convención del profesor H. Weyl, para distinguir elementos recíprocos: elementos cogredientes de elementos contragredientes, y covariación de contravariación, sobreentendido el signo $\sum$.

DIGRESIÓN 0.5

Definiciones y filosofía

Entramos de lleno a la parte matemática, esto es, la geometría en un *continuum* euclideano plano, afín. Supondremos al lector familiarizado con la teoría de linealizaciones. o de colinealizaciones.

Número. — Base de la geometría, es *un símbolo de repetición.*

Cuando decimos *uno,* nos figuramos algo, *una* cosa cualquiera. Cuando decimos *dos* nos figuramos *una repetición de la cosa.*

Fluye de esto que el origen del concepto *número* estriba en la *re-*

petición observada o percibida en la naturaleza, muy de acuerdo con el precepto del filósofo Locke. Pero no nos ataremos a filosofía alguna, vamos a descubrir la cosa nosotros mismos. Decimos que la *desigualdad* jamás podría originar el concepto de número. La cosa es así: cuando nosotros tenemos *dos percepciones absolutamente* iguales e imposibles de ser « distinguidas » una de otra, por concepto alguno, decimos el mágico DOS.

Es la *dura necesidad* que ha engendrado el *número* como concepto intelectual. *Este libro* y *esa casa son dos cosas diferentes.* ¿Qué aplicación tiene el *dos* acá? Simplemente afecta al hecho de ser « cosas »; digo, pues, que « cosas » es lo que tienen de común e « indistinguible » una casa y un libro.

Sobre este punto no puede haber discusión. Se trata de: *una verdad absoluta o invariante.* Es, pues, una ley natural, de acuerdo con los preceptos del cálculo tensorial y Einstein. El lector debe « sentir » esta « realidad absoluta » y dentrilarla mentalmente, si tiene alguna duda, hasta asimilar su importe *con la convicción de su veracidad* teniendolo después, siempre de frente intelectualmente. Decimos esto e insistimos tanto porque estamos fundando *la base única, absoluta, del edificio geométrico* que pensamos erigir y que se llamará: *Harmonización tensorial.*

Este edificio surge, pues, del cálculo tensorial, reconstruído sobre la base mencionada del *número como símbolo de repetición.*

En virtud de esto es que se numeran puntos de un *continuum,* llamándolos coordenados. Naturalmente el *continuum* puede ser de *una dimensión* y puede ser de *n* dimensiones, i. e., una multiplicidad riemeniana discreta o continua.

Dimensión. — La noción de *dimensión,* entraña la existencia de *una cosa dentro de otra mayor.* Esto lo sabemos todos: un punto en una línea, plano o espacio; una línea en un plano; un plano o superficie en un espacio, etc.

Axioma fundamental. — *Dos puntos jamás pueden coincidir* y, a lo más, *en el límite* podrán llegar a *yuxtaponerse.*

¿Por qué no pueden coincidir dos puntos?

Simplemente porque *son dos puntos* y no *un punto.* Vemos, pues, una ley natural invariante expresable como sigue en forma *abstracta* y *que abarca absolutamente todo,* i. e., la *repetición* excluye la *posibilidad* de *coincidencia.*

DIGRESIÓN 0.55

Definiciones

Se ha definido el concepto *número* y el concepto de *repetición,* que excluye la posibilidad de *coincidencia.*

Ahora se dice que: *un punto* que se repite es una *propagación* lo cual entraña, *a fortiori,* los dos nuevos conceptos siguientes: *tiempo* y *espacio.*

La *propagación* se verifica de *dos maneras únicas,* siguientes:

1ª Un *movimiento,* y en este caso *el punto repite su posición en el continuum;*

2ª Una *densificación,* y en este caso es *una reproducción* del punto por efecto de *una acción* que se *repite.*

Se dejará para más adelante el estudio a fondo de cómo se «realiza» una *densificación puntual* que da por resultado una *dimensionalización* en un *continuum mayor.* Pero si decimos que cuando se *dimensionaliza* en un *continuum* y se produce una densificación puntual, los espacios *interpuntuales* se llenan de *puntos originales del continuum mayor* — y no nos preocuparemos mayormente de analizar las condiciones físicas de estos puntos, — *los llamaremos puntos;* si es que tienen otro nombre queda cambiado éste aquí. Más aún, supondremos que en virtud del *teorema de Gauss* y de la *ecuación conocida de continuidad,* el *continuum mayor,* nuestro, no cambia de *tensión* cuando aumentan *las densificaciones* en su interior.

No nos atrevemos a trascender al *continuum* mayor por temor de incurrir en la pena del hijo de Eolo, tan harmónicamente descrita por el ciego de Mileto.

ἀλλ ὅτε μὲλλοι
ἄκρον ὑπερβαλλεέιν τότ᾽ ἀποστρέψασκε κραταιίς·
αὖτις ἔπειτα πέδονδε κυλίνδετο λᾶας ἀναιδής·

Quedemos, pues, en el llano y dediquemos nuestra atención al material a la mano que es infinito.

Cuando, pues, la gravitación densifica puntos en el *continuum* mayor en virtud de una *repetición de acción* o una *propagación de densificaciones,* supondremos que se produce una especie de *inducción normal* a través de la superficie *suprauniversal.*

Notar bien ahora que el fundamento de toda esta geometrización reside en :

La *repetición,* cuyo símbolo es el número y que excluye toda posibilidad de *coincidencia.*

La *densificación* que resulta de *la acción infinitesimal de la gravitación* sobre los puntos del *continuum* mayor. Si esta acción infinitesimal se *repite,* tendremos la:

Dimensionalización por propagación, que es exactamente : *la repetición de la densificación infinitesimal puntual.*

Como no es posible la coincidencia por efecto de la « repetición », *a fortiori,* la acción periódica de la gravitación tiene que *dimensionalizar,* densificando su traza.

Un punto para repetirse tiene que *propagarse,* ya sea por una *reproducción,* efecto de una densificación periódica, o por *un movimiento* del mismo, único punto ; *ie : una repetición de la posición espacial.* Son estas las dos únicas fases posibles de este fenómeno.

Cuando un punto guarda « reposo » lo apreciamos por *una repetición de la posición temporal,* y esto lo analizaremos oportunamente.

De esto resulta que : *una línea es una propagación puntual en una dimensión. Una superficie es una propagación puntual en dos dimensiones* y *un espacio de tres dimensiones es una propagación puntual de tres dimenciones,* etc. — κτλ.

Las correspondientes *densificaciones* son fáciles de deducir e interpretar.

Esta es la base del estudio que se ha iniciado y como el lector ve descansa sobre un principio de *cálculo harmónico :* « natural ».

Cuando la acción gravitante que densifica *es variable,* y, por lo tanto, la *densificación* lo es como consecuencia, la traza integral revela el fenómeno. Pero en el reino infinitesimal esta acción será siempre uniforme, tal como los elementos de un movimiento variado cualquiera. Nótese que la *continuidad* exige en este caso *de acción variable : una harmonía en la variación* — tan conocida en la « mecánica de composición de movimientos periódicos ». Este es el terreno, y a este terreno incumbe traer el cálculo tensorial.

CAPÍTULO CUARTO

Tensores

Resumiendo, hemos visto cómo una traslación en el espacio euclideano plano se representa por medio de sus componentes en un sistema vectorial coordenado $(Oe_1, e_2, ..., e_n)$ y cómo se pasa de un sistema a otro de representación por medio de transformaciones lineales que no afectan al vector X.

Formulamos la transformación afín y en seguida las relaciones métricas basadas sobre el producto escalar o proyección. De ésto salió la forma cuadrática fundamental como expresión de la distancia entre dos puntos.

Definimos un sistema normal cartesiano coordenado y hallamos las condiciones de ortogonalidad para transformaciones lineales.

Indicamos que toda forma cuadrática puede reducirse a la expresión:

$$Q(x) = \sum_i^n \varepsilon_i x_i^2 \qquad \varepsilon_i = \pm 1$$

y así caracterizamos al espacio por medio de los índices de inercia, esto es: el número de vectores normales positivos y el número de negativos. Fué basándose en este teorema que Minkowsky dividió al universo en espacio y tiempo.

La condición de forma lineal independiente encierra, naturalmente, la imposibilidad de hallar un sistema de valores que anule las n ecuaciones:

$$\xi_i' = \sum_k^n \alpha_i^k \xi_k$$

lo cual exige que

$$|\alpha_i^k| \neq 0.$$

También vemos que una forma bilineal es: lineal en X y lineal en Y. Es homogenea, o sea si X = 0 será Y = 0. Pero será X = 0 si se tiene

$$\xi_i = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n$$

o será Y = 0 si

$$\eta_i = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Consideremos ahora la forma bilineal concomitante :

$$\sum_{i=1}^{n} \xi^i \eta_i$$

en un sistema vectorial coordenado $(Oe_1, e_2, \ldots, e_n)$ y sometamos a la misma a dos transformaciones recíprocas, como sigue :

$$\xi^i = \sum_k^n \alpha_k^i \bar{\xi}^k; \qquad \eta_i = \sum_k^n \bar{\alpha}_i^k \bar{\eta}_k$$

$$|\alpha_k^i| \neq 0 \qquad \text{y} \qquad |\bar{\alpha}_i^k| \neq 0$$

sabemos de las determinantes que estas transformaciones dejan inalterada a la ecuación, quiere decir que

$$\sum_i^n \xi^i \eta_i = \sum_i^n \bar{\xi}^i \bar{\eta}_i = \sum_i^n \bar{\bar{\xi}}^i \bar{\bar{\eta}}_i = \text{etc.}$$

en que los (ξ^i) se transforman por lineales que son recíprocas de las que transforman a (η_i). y en particular, las últimas son idénticas a las que transforman a los vectores básicos (e_i). Diremos, pues, que los (ξ^i) son, relativamente a los (e_i), contragredientes y los (η_i) cogredientes; y diremos que la traslación, cuyas componentes son los (ξ^i), es un vector contravariante, mientras que la de componentes (η_i) es covariante.

La condición de invariación de la bilineal unitaria

$$\sum_i^n \xi^i \eta_i$$

se halla en seguida, pues substituyendo tendremos

$$\sum_{i,k}^n \alpha_k^i \cdot \bar{\alpha}_i^k \bar{\xi}^k \bar{\eta}_k,$$

eligiendo el término r tendremos

$$\sum_r \alpha_r^i \bar{\alpha}_k^r \bar{\xi}^r \bar{\eta}_r$$

y la invariación exige :

$$\sum_r \alpha_r^i \bar{\alpha}_k^r = \delta_k^i = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k. \end{cases}$$

Fácilmente se deduce que si :

$$\sum_i^n \xi^i \eta_i = \sum_i^n \bar{\xi}^i \bar{\eta}_i, \qquad \xi^i = \sum_k^n \alpha_k^i \bar{\xi}^k, \qquad \eta_i = \sum_k^n \bar{\alpha}_i^k \bar{\eta}_k,$$

se tiene:

$$\sum_i^n \eta_i \sum_k^n \alpha_k^i \xi^k = \sum_i^n \xi^i \eta_i.$$

o por simetría:

$$\sum_k^n \eta_k \sum_i^n \alpha_i^k \bar{\xi}^i = \sum_i^n \xi^i \eta_i,$$

de donde:

$$\left(\sum_k^n \alpha_i^k \eta_k\right) \bar{\xi}^i = \xi^i \bar{\eta}_i$$

$$\bar{\eta}_i = \sum_k^n \alpha_i^k \eta_k,$$

y análogamente

$$\bar{\xi}^i = \sum_k^n \alpha_k^i \xi^k$$

que nos dan como condición de invariación

$$\sum_r \bar{\alpha}_i^r \alpha_r^k = \delta_i^k = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k. \end{cases}$$

Deducimos, pues, que *sólo existe una transformación contragrediente* que deja inalterada a la forma bilineal y que sólo existe una transformación contragrediente para una forma lineal, etc., todo lo cual sabíamos del estudio de determinantes en general.

Vemos que una transformación ortogonal es a la vez su propia contragrediente, o recíproca.

Ya hemos hecho notar que la invariación del vector X, o traslación, estriba precisamente en la contragrediencia que existe entre *componentes* y *vectores coordenados*, por ejemplo:

$$X = \sum_i^n \xi^i e_i, \qquad \bar{e}_i = \sum_k^n \alpha_i^k e_k, \qquad \xi^i = \sum_k^n \alpha_k^i \bar{\xi}^k,$$

$$X = \sum_i^n \xi^i e_i = \sum_i^n \xi^i e_i = \text{etc.},$$

en que $\bar{e}_i$ y ξ^i se transforman de igual manera, etc. Decimos, pues, que las componentes (ξ^i) de X *son de un vector* contravariante, etc., como ya hemos mencionado. También diremos que *una traslación*, en virtud de este hecho, es *un vector contravariante en el espacio afín* plano euclideano, y esta es una característica del espacio afín, en el cual

toda traslación es *un vector contravariante* cuyos componentes se transforman en forma contragrediente relativamente a los vectores básicos coordenados.

Espacio métrico. — En este espacio las componentes de una traslación X *son las proyecciones de la misma sobre los vectores coordenados unitarios,* i. e. :

$$\xi_i = (X \,.\, e_i)$$

desde ya vemos que los ξ_i se transforman como los e_i; diremos en consecuencia que los (ξ_i) son componentes covariantes de un vector X, o traslación, y que se transforman en forma cogrediente a los (e_i). De ahí que si :

$$\bar{e}_i = \sum_k^n \alpha_i^k e_k, \qquad X = \sum_i^n \xi^i e_i = \sum_k^n \xi^k e_k,$$

fácilmente :

$$\bar{\xi}_i = \sum_k^n \alpha_i^k \xi_k$$

$$\bar{\xi}_i = \left(\sum_k^n \xi^k e_i \,.\, e_k\right) = \sum_k^n (e_i e_k)\, \xi^k = \sum_k^n g_{ik} \xi^k$$

$$g_{ik} = (e_i e_k) = Q\,(e_i e_k),$$

y si

$$g^{ik} = \frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dg_{ik}}, \qquad \Delta = |\, g_{ik} \,|,$$

tenemos

$$\xi^i = \sum_k^n g^{ik} \bar{\xi}_k$$

en un sistema normal

$$g_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

$$\xi^i = \xi_i.$$

De donde inferimos que en un sistema normal no existe diferencia entre « componentes contravariantes y componentes covariantes » de un vector. Evidentemente, en *un espacio afín,* como sólo son posibles las componentes contravariantes de una traslación, no tiene sentido hablar de componentes covariantes, etc. Es que *en un espacio afín los vectores mismos son : covariantes o contravariantes,* y de esto depende la forma en que se transforman sus componentes relativamen-

te a los vectores básicos, mientras que en *un espacio métrico son las componentes de un mismo vector las que pueden ser covariantes o contravariantes,* según se transforman directa o recíprocamente, respectivamente, etc. En virtud de estas distinciones es siempre posible saber si una forma lineal se refiere a un espacio afín o a un campo métrico.

Hemos hecho notar que una traslación tiene un valor independiente del sistema vectorial coordenado en que se expresa. Así como tenemos formas que involucran una traslación podemos tenerlas de dos o más traslaciones, i. e., multilineales. Cada traslación siendo invariante relativamente a transformaciones lineales y cada traslación pudiendo ser expresada por medio de componentes covariantes o contravariantes, relativamente a los vectores básicos, en un espacio métrico.

Sea la homogénea

$$A\,(XYZ) = \sum_{i,k,l=1}^{n} \alpha_l^{ik} \xi_i \eta_k \zeta^l$$

en que A (XYZ) es una función lineal de tres traslaciones que, en el sistema coordenado adoptado, dos son representadas por sus componentes covariantes y la otra por sus componentes contravariantes. Si transformamos coordenadas tendremos

$$A\,(XYZ) = \sum_{i,k,l=1}^{n} \alpha_l^{ik} \xi_i \eta_k \zeta^l = \sum_{i,k,l=1}^{n} \bar{\alpha}_l^{ik} \bar{\xi}_i \bar{\eta}_k \bar{\zeta}^l ;$$

los α_l^{ik} son los coeficientes de la forma trilineal y, como se ve, se han escrito los índices en una forma convencional: opuesta a la posición que ocupan los de las variables correspondientes, para significar contragrediencia. Esta forma trilineal invariante se llama *un tensor*, siendo los coeficientes (α_l^{ik}): los componentes del tensor, son contravariantes en i, k y covariantes en l. Es un tensor en un espacio métrico, por las razones ya enunciadas.

Hemos llegado de esta manera al concepto de « tensor ». Nos apercibimos que se trata de una forma *multilineal invariante* que llena todas las condiciones ya enumeradas, que caracterizan a las formas lineales no degeneradas. Deducimos que un tensor es una forma multilineal que posee un valor *independiente del sistema de representación* y que se compone de tal manera que si se tiene:

$$\sum_{mnp} a_p^{mn} \xi^p \eta_m \zeta_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{mnp} \bar{a}_p^{mn} \bar{\xi}^p \bar{\eta}_m \bar{\zeta}_n$$

en dos sistemas coordenados vectoriales, éstas se transforman una en

otra, cuando a (η, ξ) aplicamos transformaciones cogredientemente y a (ξ) contragredientemente a los vectores básicos.

Generalmente se atribuye el descubrimiento de las funciones « invariantes » al matemático inglés Boole, quien las dió a conocer en un artículo publicado en la *Cambridge Mathematical Journal*, de noviembre de 1841. Cayley y Sylvester en seguida, contemporáneamente, desarrollaron la teoría de las mismas, etc. Pero es preciso recordar que Gauss, en ese mismo tiempo, distinguía entre *medidas interiores* y *exteriores*, relativas a la geometría de superficies curvas, revelando posesión del principio de invariación y llegó a establecer el principio de invariación de curvatura relativamente a deformaciones continuas, etc.

Para comprender exactamente el significado de este principio no hay más que reflexionar sobre la siguiente observación: *un libro*, constituye para nosotros una realidad — desde el momento que es libro para todo sér humano que lo percibe — que tiene un significado (valor) completamente *sui generis* e *invariante*. Si lo representamos por la palabra *book* o βιβλος, etc, *en nada cambiará*. Conociendo yo su representación en *un idioma* y poseyendo un diccionario (ecuaciones de transformación) fácilmente hallaré su representación en otro idioma determinado. Es así que *una traslación* es invariante, y es así que *un tensor* es invariante. En el caso del libro nos valemos de un sistema coordenado « fonético » y las palabras *livre, book*, βιβλος, etc., son simples representaciones en diferentes sistemas coordenados. Si vamos a mayor profundidad, nos apercibimos que todo descansa sobre un número determinado de « sonidos simples » desprovistos de significado, en el sentido absoluto, que resultan de *una deformación continua* pulmonar vocal, efecto de *una percepción visual,* y que tiene la virtud de producir *una percepción auricular,* que establece *la reversibilidad del proceso cerebral,* por densificación de traza entre dos aferencias y una eferencia común. Es desde esta base fundamental que debemos partir para el estudio de los fenómenos.

Muy pronto comprendemos el « dilema riemeniano » que está encerrado en la pregunta: ¿en virtud de qué acción, o causa, es que nacen *las dimensiones determinadas* en un *continuum* de *d* dimensiones? Una multiplicidad continua es algo desprovisto de sentido, ¿qué es, pues, lo que la convierte en « discreta »? La causa es *una acción extraña* — lo comprendemos claramente en el caso del *libro*, que matemáticamente expresado no es más que *una densificación fonética ordenada de varios sonidos simples elementales*. La « densificación » que

produce «la dimensionalización» en el *continuum* einsteniano es *la traza de la gravitación :* materialización.

Analizando una «densificación estática» hasta el límite posible de sencillez, vemos que en último grado depende : *de la distancia entre dos puntos materiales o de energía.* Depende del campo métrico. Más adelante el lector comprenderá intuitivamente la maravillosa armonía que preside la teoría einsteniana que hace depender todos los fenómenos de nuestro mundo de las variaciones de un «tensor métrico de segundo orden fundamental».

Dejando esta digresión y volviendo al *tensor,* repetimos que : los coeficientes (a_l^{mn}) de la forma trilineal son *los componentes del tensor de tercer orden doblemente contravariante* y *simplemente covariante.* Los índices colocados en alto indicarán siempre contravariación y los subíndices covariación relativamente a los vectores básicos unitarios fundamentales (e_i). Seguimos el método de Weyl.

Supongamos una traslación X representada por :

$$X = a^1\xi_1 + a^2\xi_2 + \ \ldots \ + a^h\xi_h + \ \ldots$$

en un sistema cualquiera de coordenadas vectoriales (los a_i son en este caso componentes contravariantes de un tensor de primer orden). Diremos, pues, que *una traslación es un tensor de primer orden o un vector contravariante;* aquí damos un significado más lato a la palabra *vector.* Traslaciones son *vectores contravariantes* o *tensores de primer orden.* Esta definición se refiere exclusivamente, como se ve, a un espacio euclideano afín. En un espacio métrico las traslaciones pueden tener componentes $\left\{ \begin{matrix} \text{covariantes} \\ \text{contravariantes} \end{matrix} \right\}$.

Siendo una velocidad el producto de un desplazamiento por un factor temporal $\left(\frac{1}{dt}\right)$, deducimos que *: una velocidad es un vector contravariante,* o sea un tensor de primer orden.

La mecánica moderna mide una fuerza por el trabajo que efectúa. Llamemos (p_i) los componentes según los vectores básicos (e_i) de una fuerza, i. e., los trabajos virtuales ejecutados por desplazamiento del punto de aplicación a lo largo de (e_i) ; el trabajo que corresponde a un desplazamiento arbitrario X será evidentemente :

$$P = \xi^1 p_1 + \xi^2 p_2 + \ \ldots \ + \xi^n p_n = \sum_i^n \xi^i p_i.$$

Si transformamos coordenadas se ve que :

$$P = \sum_i^n \xi^i p_i = \sum_i^n \xi^i \bar{p}_i = \textit{invariante}.$$

de donde : *la fuerza es un vector covariante.* Evidentemente los (p_i) se transforman en forma cogrediente relativamente a los (e_i).

Dos tensores de componentes a^i, b_i respectivamente, que se transforman por recíprocas dan una

$$\sum_i^n a^i b_i$$

que *es invariante* como sabemos. Tenemos, así, un ejemplo de una operación invariante tensorial.

Un número o una magnitud escalar es un tensor de orden cero.

El tensor unitario de segundo orden es :

$$\sum_i^n \xi^i \eta_i,$$

podemos suponer a este tensor de segundo orden con componentes

$$\delta_i^k = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

como vimos.

Cuando un tensor tiene componentes con índices elevados e índices bajos diremos que es *mixto*. En los demás casos será un tensor contravariante o covariante de n orden, etc.

La simetría de un tensor implica su inalterabilidad por intercambio de componentes variables : ξ por η, ξ por ζ, etc. Será levo-simétrico si este cambio produce cambio de signo y *esta propiedad, sabemos analíticamente, que no es alterada por transformaciones lineales de una misma clase,* quiere decir que la simetría y levo-simetría son propias de tensores *no mixtos* del segundo orden arriba.

En estos tenemos :

$$\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}, \text{ etc.}$$

La estructura métrica del espacio euclideano se caracteriza por la invariación del número que representa el producto escalar de dos desplazamientos X, Y respectivamente ; así : suponiendo *siempre unitarios básicos* los (e_i)

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_i^n \xi^i e_i \\ Y &= \sum_k^n \eta^k e_k \end{aligned} \right\} (X \cdot Y) = \sum_{ik}^n g_{ik} \xi^i \eta^k$$

en que

$$g_{ik} = Q(e_i e_k) = (e^i e_k)$$

$$(XY) = \sum_{ik}^{n} g_{ik} \xi^i \eta^k \qquad g_{ik} = g_{ki}$$

es el tensor métrico fundamental que caracteriza al espacio plano. Es *de segundo orden y simétrico.*

Como en un espacio métrico tenemos

$$\xi^i = \sum_{k}^{n} g^{ik} \xi_k$$
$$g_{ik} g^{ik} = 1$$
$$\xi_i = \sum_{k}^{n} g_{ik} \xi^k$$

vemos inmediatamente que:

$$g_{ik} \xi^i \eta^k = g_{ik} \xi^i \cdot g^{ik} \eta_i = \xi^i \eta_i$$

fácilmente, pues en *un espacio métrico*

$$\sum_{ik}^{n} g_{ik} \xi^i \eta^k = \sum_{ik}^{n} g^{ik} \xi_i \eta_k = \sum_{i}^{n} \xi^i \eta_i = \sum_{k}^{n} \xi^k \eta_k.$$

El lector recordará que toda transformación lineal puede interpretarse como una correspondencia afín. La correspondencia se establece por medio de una matriz A, por ejemplo, de componentes (a_i^k). En este orden de ideas vimos que a:

x corresponde un vector x';
$x + y$ corresponde un vector $x' + y'$;
mx corresponde un vector mx'.

Si

$$X = \sum_{i}^{n} \xi^i e_i, \qquad X' = \sum_{i}^{n} \xi^i e_i', \qquad e_i' = \sum_{k}^{n} \alpha_i^k e_k,$$

esto es si e_i y e_i' definen la correspondencia, deducimos:

$$X' = \sum_{i}^{n} \xi^i e_i' = \sum_{i}^{n} \xi^i \sum_{k}^{n} \alpha_i^k e_k = \sum_{ik}^{n} \alpha_i^k \xi^i e_k$$

pero como sabemos que:

$$\sum \xi^i e_i = \sum \xi'^i e_i' = X$$

será:

$$\sum_{ik}^{n} \alpha_i^k \xi^i e_k = \sum_{ik}^{n} \bar{\alpha}_i^k \bar{\xi}^i \bar{e}_k$$

si substituímos por (e_k) un vector de componentes cogredientes con (e_i), i. e., un vector covariante de componentes (η_i), tendremos manifiestamente:

$$\sum_{ik}^{n} \alpha_i^k \xi^i \eta_k = \sum_{ik}^{n} \bar{\alpha}_i^k \bar{\xi}^i \bar{\eta}_k,$$

que es un tensor mixto de segundo orden, contravariante en X y covariante en Y. El lector ya está familiarizado con el método de substituciones de magnitudes covariantes, etc., en el estudio de determinantes.

Un tensor, pues, puede definirse diciendo que es *una función multilineal* que *toma valores independientes* del sistema de representación cuando substituímos las *variables cogredientes* por *componentes covariantes* de un vector y las *variables contragredientes* por *componentos contravariantes* de un vector arbitrario.

En un espacio métrico podemos elevar o bajar un índice por medio de las ecuaciones:

$$\xi_i = \sum_{k}^{n} g^{ik} \xi_k \qquad g_{ik} = (e_i e_k) = g_{ki}$$

$$\xi_i = \sum_{k}^{n} g_{ik} \xi^k \qquad g_{ik} g^{ik} = 1.$$

En virtud de esto vemos que

$$\sum \alpha_i^k \xi^i \eta_k = \sum \alpha^{ik} \xi_i \eta_k = \sum \alpha_{ik} \xi^i \eta^k = \sum \alpha_k^i \xi_i \eta^k, \text{ etc.},$$

que contiene la regla de alteración de índices correspondientes

$$a_i = \sum_{m}^{n} g_{im} a^m, \qquad g_{im} = g_{mi},$$

o también:

$$a_i^{kl} = \sum_{m}^{n} g_{im} a^{klm} \qquad g_{im} = g_{mi}.$$

Así pues:

$$\alpha^{ik} = \sum_{\gamma} g^{i\gamma} \alpha_\gamma^k \qquad g_{i\gamma} = g_{\gamma i}.$$

Sobreentiéndese el signo de suma $\sum$:

$$\alpha^{ik} \xi_i \eta_k = (g^{i\gamma} \alpha_\gamma^k) \xi_i \eta_k = \alpha_\gamma^k \cdot g^{i\gamma} \xi_i \eta_k = \alpha_\gamma^k \xi^\gamma \eta_k, \text{ etc.}, \qquad g_{ik} = g_{ki},$$

esto es:

$$\alpha^{ik} \xi_i \eta_k = g^{i\gamma} \alpha_\gamma^k \cdot g_{i\gamma} \xi^\gamma \eta_k$$

desde que $g^{i\gamma} g_{i\gamma} = 1$, se tiene:

$$g^{i\gamma} g_{i\gamma} \alpha_\gamma^k \xi^\gamma \eta_k = \alpha_\gamma^k \xi^\gamma \eta_k.$$

CAPÍTULO QUINTO

Tensores. Ejemplos

Resulta de la consideración de las formas lineales que dos tensores de una misma especie pueden sumarse o restarse y que cualquier tensor puede ser multiplicado por un factor escalar o una constante. Dos tensores podrán multiplicarse entre sí, dando por resultado un tensor de orden igual a la suma de los órdenes de los factores, tensores.

Por último, la suma de tensores da lugar a la contracción de índices iguales.

Un tensor cuyos componentes son todos respectivamente iguales a cero, es un tensor $T = 0$, o nulo. Este tensor es de importancia como hemos de ver más adelante. En cada orden de tensores existe un tensor cero y el significado de esto aparecerá claramente cuando se lea la digresión sobre *punto*.

Si sobreentendemos siempre el signo $\sum$ de suma y completada la forma con las variables componentes de desplazamientos o vectores, podemos abreviar mucho la escritura de las operaciones tensoriales sin incurrir en peligro alguno de confusión. Así, u^i serán componentes contravariantes de un tensor de primer orden, i. e., componentes de una traslación.

Así, pues

$$\sum a_i \xi^i, \qquad \sum b_k \eta^k,$$

o respectivamente a_i, b_k, dan por multiplicación

$$a_i b_k = \gamma_{ik}$$

un tensor de segundo orden. Fácilmente tenemos :

$$a_i b_k - a_k b_i = \gamma_{ik} - \gamma_{ki} = c_{ik}$$

o empleando componentes contravariantes :

$$\gamma^{ik} - \gamma^{ki} = a^i b^k - a^k b^i = c^{ik}$$

son componentes de un tensor levo-simétrico de segundo orden. No pasando de tres dimensiones podemos, de acuerdo con el cálculo vectorial, atribuir a este tensor levo-simétrico, contravariante o cova-

riante, un significado de producto vectorial que está a la vista y no requiere por el momento mayor atención.

Supongamos que en nuestro espacio euclideano plano cada punto es representado por coordenadas x_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Un punto $P = (x_i)$ y el vecino $P' = (x_i + dx_i)$. Si hacemos variar la posición de este punto P mediante una acción extraña simbolizada por un parámetro t (el tiempo, por ejemplo) obtendremos un movimiento y P describirá una trayectoria en cada punto del cual tendremos:

$$\frac{dx_i}{dt} = u^i = \text{velocidad},$$

en que u^i son componentes contravariantes de la velocidad. Si ahora m es *una escalar* que representa la materialización de un punto P tendremos como expresión del *momentum :*

$$mu^i = m\frac{dx_i}{dt}$$

por multiplicación y si P es un punto de un sistema material y G^i es la componente total del *momentum,* o cantidad de movimiento:

$$G^i = \sum_m mu^i$$

o simplemente mu^i.

Recordando principios de la mecánica clásica:

$$G^i = mu^i, \qquad \frac{dG^i}{dt} = p^i;$$

p^i = componentes contravariantes de la fuerza y vemos que siendo la fuerza un vector covariante la ecuación anterior sólo podrá referirse al espacio métrico. Los componentes covariantes tendrían la forma

$$\frac{dG_i}{dt} = p_i$$

pero nótese que para esto será necesario que tengamos G_i, lo cual es posible en un espacio métrico únicamente, puesto que en *un espacio afín la velocidad es un vector contravariante* y:

$$u = \frac{dx}{dt}; \qquad G^i = mu^i$$

en *un espacio métrico* sería pues:

$$G_i = m \,.\, u_i = m \,.\, g_{ik}u^k$$

$$u_i = g_{ik}u^k, \text{ etc.}$$

Por multiplicación tenemos:

$$a_i \,.\, b_u{}^m = c_{iu}{}^m, \qquad a_i b_{um} = c_{ium},$$

lo cual indica un juego de índices correspondientes en dos miembros de una ecuación tensorial.

Ejemplos de tensores levo-simétricos son numerosos. El momento de la cantidad de movimiento relativamente a un punto O tiene como expresión:

$$\mathrm{OP} = (\xi^i) \qquad mu^i\xi^k - mu^k\xi^i$$

bien conocida. Si suponemos que esta ecuación se suma para todos los puntos materiales m de un cuerpo o sistema tendremos

$$\mathrm{L}^{ik} = \sum_m m\,(u^i\xi^k - u^k\xi^i) = m\,(u^i\xi^k - u^k\xi^i).$$

El momento de una fuerza relativamente a un punto O será análogamente:

$$\mathrm{OP} = (\xi^i) \qquad p^i\xi^k - p^k\xi^i$$

y si esto se extiende a todos los elementos de un sistema, será:

$$q^{ik} = \sum (p^i\xi^k - p^k\xi^i).$$

Bien sabemos de la mecánica que

$$\frac{d\mathrm{L}_{ik}}{dt} = q_{ik}$$

y si no obran fuerzas, esta última ecuación tiene un significado especial

$$\frac{d\mathrm{L}_{ik}}{dt} = 0.$$

Todavía tenemos otro ejemplo de tensor levo-simétrico en la *velocidad de rotación al rededor de un punto.*

Esta velocidad se puede calcular de una manera muy conveniente y sencilla valiéndonos de transformaciones lineales infinitesimales, esto es, por medio de matrices infinitesimales. En general, si una matriz A de componentes $(\alpha_i{}^k)$ produce una rotación definida por la correspondencia:

$$e_i = \alpha_i{}^k e_k$$

suprimiendo el $\sum$; y si sometemos el sistema a transformaciones continuas, vemos que las matrices A constituyen un grupo. En un espacio

métrico pitagórico, i. e., en que postulamos como distancia entre dos puntos una forma cuadrática, las matrices infinitesimales que son admisibles son aquellas que dejan *invariante* a la forma métrica fundamental unitaria :

$$Q(xx) = 1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = Q_0,$$

estas matrices producen rotaciones infinitesimales como sabemos. Quiere decir que si (ξ_i) son las componentes de un vector $\overline{OP}$ que pasa a ser $\overline{OP'}$ por una rotación infinitesimal definida por la matriz U, la variación causada debe ser del mismo orden de pequeñez que U, así, pues, podemos escribir la lineal :

$$d\xi^i = u^{ik}\xi_k,$$

pero

$$dQ_0 = 0 = 2\xi^i d\xi^i$$

y de aquí:

$$2\xi^i \cdot (u^{ik}\xi_k) = 2\xi^i u_i \xi_k = 2u_i^k\xi^i\xi_k = 0,$$

esto es :

$$u_i^k\xi^i\xi_k = 0,$$

y, por lo tanto, forzosamente

$$\sum u_i^k = 0,$$

quiere decir que

$$u_{ik} = -u_{ki} \qquad \text{o} \qquad u^{ik} + u^{ki} = 0,$$

o que (u_{ik}) es levo simétrico.

El lector se apercibirá que es la misma cosa someter un sistema o cuerpo a una rotación al rededor de un punto fijo, o dejar inmóvil al cuerpo y someter al sistema coordenado a un movimiento equivalente. El desplazamiento es medido en este caso por $(d\xi^i)$ y la clase de afinidad resultante está definida por los (u_k^i). Se ve, pues, que si multiplicamos a los (u_{ik}) por $\left(\frac{1}{dt}\right)$ obtendremos la rotación por unidad paramétrica temporal, etc. Podemos escribir

$$\frac{dU}{dt} = V$$

y así resultará, cambiando letras,

$$\frac{d\xi^i}{dt} = u^i = \sum v^{ik}\xi_k,$$

o en componentes covariantes

$$u_i = \sum v_{ik}\xi^k \qquad \text{o} \qquad u_i = v_{ik}\xi^k;$$

la velocidad angular es, pues, V de componentes :

$$v_{ik} = - v_{ki}.$$

Resulta, pues, que (u_i) son los componentes de velocidad lineal de *un tensor de tercer orden* ($v_{ik}\xi^k$) en el cual se han *sumado los índices comunes* (k). Aquí tenemos un ejemplo de contracción tensorial, que es la operación más común del cálculo tensorial. Un eje de rotación. instantáneo, quedaría definido por el lugar de los puntos para los cuales

$$\sum v^{ik}\xi_k = 0.$$

También deberá observarse, de acuerdo con los elementos del cálculo vectorial, que en la rotación infinitesimal que desplaza el punto P a P′ y ocasiona la variación de componentes ($d\xi^i$), estas variaciones son componentes, a la vez, del desplazamiento $\overline{\text{PP}'} = d\text{X}$, como es evidente. Así, pues, que podríamos decir que la rotación produce un desplazamiento $d\overline{\text{X}} = \text{PP}'$ y da lugar a *la correspondencia lineal* entre $\overline{\text{PP}'}$ y $\overline{\text{OP}}$ siguientes :

$$d\text{X} = \text{U} \, . \, \text{X}$$

de componentes

$$d\xi^i = u^{ik}\xi_k = u_k{}^i\xi^k$$

en que los componentes (u^{ik}) son del mismo orden que ($d\xi^i$).

La condición *postulada* de ser el espacio métrico de *naturaleza Pitagórica encierra la condición de invariación de la forma fundamental métrica unitaria* definida por la conocida cuadrática sylvestriana — bien corresponde este nombre en homenaje al hombre de ciencia — *relativamente a transformaciones lineales.*

Si

$$u^{ik}\xi_i\xi_k = 0$$

es porque en el desarrollo de la forma para todos los valores de i, k, $= 1, 2, ..., n$, los términos u^{ik} y u^{ki} son de signos contrarios y se destruyen. Etc.

Como ejemplo de un tensor simétrico de segundo orden podemos elegir el *momento de inercia* de un cuerpo relativamente a un punto O fijo. Aquí también tenemos que recordar que estamos operando en un espacio de *n dimensiones* con una forma cuadrática *como distancia* y que estamos en un espacio plano euclideano con un sistema

vectorial coordenado cualquiera. Si m es una escalar de masa puntual y T_{ik} la componente de momento de inercia del sistema o cuerpo relativamente a un punto O:

$$T_{ik} = m\xi^i\xi^k,$$

o si se quiere:

$$T_{ik} = \sum_m m\xi^i\xi^k.$$

Observando, de acuerdo con la mecánica clásica:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2} mr^2 \cdot \omega^2$$

en que

$$T = mr^2$$

podemos decir que, substituyendo r^2 *por la forma cuadrática fundamental* conocida, tenemos:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2} T \cdot \omega^2,$$

o sea: que *cuando se trata de una rotación,* T desempeña el mismo rol que *m en el caso de una traslación,* i. e., en una traslación todos los puntos de un cuerpo se mueven de la misma manera. En una rotación ω es común para todos los puntos del cuerpo, etc.

Contracción tensorial. — Repetimos lo que ya hemos observado:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

es un ejemplo de contracción; $\overline{AC}$ es la suma contracta de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

Mejor aún: si una matriz A transforma X en X′ y otra B transforma X′ en X″, existe una tercera C que transforma X en X″ directamente. Este es un principio fundamental de la teoría de grupos. Llamando (α_k^i) las componentes de A, (β_k^i) las de (B) y (γ_k^i) las de C, tendremos:

$$\gamma_k^i = \sum_r \alpha_r^i \cdot \beta_k^r,$$

en que aparecen los (γ_k^i) como componentes de la contracción de un tensor de cuarto orden. Para demostrar esto, basta probar que

$$\sum c_i^i = \sum \bar{c}_i^i$$

es *una invariante.*

Sea la forma o tensor de segundo orden

$$\sum_{ik} c_k{}^i \xi^k \eta_i$$

y transformemos coordenadas de suerte que

$$\begin{cases} \xi^i = \sum\limits_k \alpha_k{}^i \bar{\xi}^k \\ \eta_i = \sum\limits_k \bar{\alpha}_i{}^k \bar{\eta}_k . \end{cases}$$

Resultará:

$$\sum_{ik} c_k{}^i \xi^k \eta_i = \sum_{ik} \bar{c}_k{}^i \bar{\xi}^k \bar{\eta}_i .$$

Fácilmente, pues, el coeficiente $\bar{c}_r{}^r$ será:

$$\bar{c}_r{}^r = \sum_{ik} c_k{}^i \alpha_r{}^i \bar{\alpha}_k{}^r$$

sumando con relación a r

$$\sum_r \bar{c}_r{}^r = \sum_r \sum_{ik} c_k{}^i \alpha_r{}^i \bar{\alpha}_k{}^r = \sum_{ik} c_k{}^i \sum_r \alpha_r{}^i \bar{\alpha}_k{}^r .$$

Pero aquí tenemos el caso de la *invariación* por *concomitancia* de una bilineal, ya conocida, y por lo tanto:

$$\sum_r \alpha_r{}^i \bar{\alpha}_k{}^r = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

esto es:

$$\sum_r^n \bar{c}_r{}^r = \sum_{ik}^n c_k{}^i \qquad i = k$$

$$\sum_r^n \bar{c}_r{}^r = \sum_i^n c_i{}^i .$$

El lector tendrá que familiarizarse con el «juego de índices» propio del cálculo tensorial, lo cual no ofrece dificultades si se pone atención en el significado de los mismos. Es lo mismo escribir a que b si a y b varían de 1 a n, etc.

Vemos, en consecuencia, que podemos contraer los índices opuestos (contragredientes) iguales de un tensor.

Ejemplos:

$$a_{rm}{}^{klm} = a_r{}^{kl}; \qquad \alpha_m{}^m = a; \qquad v^{ik} \xi_k = u^i .$$

Volvemos a decir que la contracción es la operación más común del cálculo tensorial.

$a^i a_i$ es una invariante que en un sistema normal cartesiano se convierte en una suma de cuadrados (siempre $a^i a_i = \sum a_i a^i$, etc.); de aquí que la raíz cuadrada nos dará la magnitud absoluta del tensor. Lo mismo $a^{ik} a_{ik}$ o $\sum a^{ik} a_{ik}$, etc. Ya recordará el lector que en este sistema coordenado normal :

$$\xi^i = \xi_i \qquad \text{o} \qquad g_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k. \end{cases}$$

La *invariante* formada con los a_i^i, esto es, $\sum_i a_i^i$ toma el nombre de traza de la matriz A.

Hasta ahora se habrá notado que para nada hemos hablado de las coordenadas de un punto. Toda nuestra atención ha sido concentrada *sobre traslaciones,* como magnitudes dirigidas o vectores; el punto preciso del espacio en el cual tiene lugar la traslación pasa desapercibido en un espacio euclideano plano, puesto que este espacio es igual en todas partes y en todas direcciones. En general, asociamos una magnitud escalar, tensorial, o un vector a *un punto determinado de una zona o dominio espacial*, de manera, pues, que el valor de esta escalar, tensor o vector *varía de un punto* $P = (x_i)$ *a otro* $P' = (x_i')$. Este dominio así caracterizado toma el nombre de *campo,* y será un *campo escalar, tensorial o vectorial,* según se trate de una función escalar dada para cada punto del mismo, o un tensor o un vector respectivamente.

Deducimos, en consecuencia, que los puntos del campo quedan determinados por medio de coordenadas en un sistema vectorial y que escalares, tensores y vectores son magnitudes expresadas en función de estas coordenadas. Podremos decir que : escalares, tensores y vectores son, en realidad, *funciones del lugar o punto.* Un campo es conocido cuando conocemos el valor de la escalar, el tensor o el vector para cada punto del mismo.

Conviene decir aquí que en un espacio continuo puntual *arbitrario,* el sistema de coordenadas que precisa la posición de un punto, difiere del usual conocido. Ahora nos valemos de *coordenadas numéricas o símbolos de repetición,* simples números. Esto es, elegimos un punto P y le *atribuímos n números arbitrarios* y para la enumeración de los demás puntos del espacio nos valemos de la noción del *continuum,* o sea : los puntos deben estar numerados de manera que dos puntos infinitamente cercanos tengan coordenadas que difieren respectivamente entre sí en cantidades infinitamente pequeñas del mismo orden que su distancia. Este *continuum* espacial de *n* dimensiones

debe llenar ciertas condiciones para poseer la propiedad de espacio plano euclideano afín, las cuales dejaremos por el momento. Añadiremos únicamente que si consideramos engendrado a este espacio paramétricamente las superficies gaussianas degeneran en planos, y la distancia cuadrática generalizada de Riemann, que expresa el intervalo entre dos puntos vecinos, se presenta con coeficientes constantes. En una palabra, no hay curvatura espacial (1).

Veremos, oportunamente, que un punto del *continuum* espacial tiene existencia, como percepción cerebral, en virtud de ser *una focalización de repeticiones, o propagaciones, cuyas respectivas características de densidad son los n símbolos numéricos coordenados.* También veremos que debido al fenómeno cerebral de *órdenes de magnitudes,* corresponderá definir un punto de la siguiente manera : *un punto es la traza limítrofe, u horizonte divisorio entre dos órdenes consecutivos de magnitudes.*

Nuestro universo perceptible es un *continuum* de repetición, y nuestras percepciones, siendo continuas, se inician en el *cero de existencia,* creciendo en intensidad hasta asomarse *al orden consciente finito de magnitudes,* y creciendo en intensidad hasta salir de este orden finito y entrar en el orden inmediato superior de *indeterminación* también *inconsciente,* en el sentido de una limitación. No hay, pues, geometría abstracta. *Un punto desaparece de un orden consciente de magnitudes con todas sus dimensiones a la vez, y pasa al orden inmediato inferior de magnitudes con todas sus dimensiones a la vez; pero ahora es un continuum ilimitado para el orden* sui generis *de consciencia que caracteriza ese orden inferior de magnitudes...* y así sucesivamente hasta el *cero orden de consciencia.* Sólo es imperceptible lo que *no existe,* quiere decir que 0 e ∞ son símbolos de *no existencia.* Existencia exige una dimensión temporal en *toda magnitud,* pudiendo ser esta dimensión de orden inconsciente para nosotros humanos, esto lo hemos confundido con «geometría abstracta» y tres dimensiones.

(1) Por sus conocimientos de « cálculo harmónico » y teniendo presente lo dicho sobre la naturaleza de la geometría como « repetición », el lector podrá vislumbrar ya que la solución matemática de *nuestras percepciones* reside en « los tensores ». Se comprende ahora cómo nos *ahogamos en fases* cuando pretendemos por « simple observación de un fenómeno » deducir sus « fundamentos ». El hombre en un laboratorio está empeñado en una tarea verdaderamente hercúlea. No necesitamos ir más allá del fenómeno de « mareas » para comprender esto.

DIGRESIÓN 0.556

Repetición

La *repetición.* — Este concepto es la base sobre la cual descansa todo el edificio de la geometría. *Percibimos por repetición.*

Número. — Es *el símbolo* mediante el cual expresamos *una repetición.* Cuando se dice *dos,* se quiere decir *dos unidades* exactamente iguales, absolutamente imposible de ser diferenciadas una de otra, *son idénticas.* No pudiendo distinguirlas por concepto alguno se dice *dos.* Precisamente es en *la repetición de la unidad* que nace el *dos.* Cuando *numeramos,* pues, lo hacemos, fundamentalmente, por un concepto de igualdad, y no por un concepto de *desigualdad.* Dícese que *un libro y una casa* son *dos cosas* diferentes — el concepto *dos* se refiere a *su característica común* de « cosa ». Es realmente extraordinaria *la confusión* que ha existido sobre este concepto de *número,* y el error, etc.

La *repetición* excluye la posibilidad de *coincidencia.*

Forzosamente, pues, la *repetición obliga la existencia* de *espacio y tiempo.*

Una repetición de percepciones, por nuestra conciencia o cerebro, es tiempo, lisa y llanamente. Puesto que *no hay desplazamiento espacial* o cambio de posición. Ahora puede el lector meditar sobre este punto y esta solución : *la única manera posible de concebir una repetición de percepciones sin desplazamiento espacial es mediante un movimiento harmónico o periódico. Se repite la fase.*

Yo *miro fijamente* hacia un punto y observo *una repetición de fase* cualquiera : mi cerebro concibe al *tiempo* y se *densifica el concepto* de *repetición de fases,* que llamaremos *repetición de instantes,* etc. Basta que se *repitan los instantes ;* la repetición *excluye la posibilidad de coincidencia.* Así, pues, *la repetición entraña al tiempo.*

Ahora, si *la fase no cambia* pero cambia *la posición,* diremos que : *la fase se repite en el espacio.* ¿ Qué es esto ? Simplemente la *repetición de posición ;* la exclusión de coincidencia obliga : un *espacio al lado del tiempo.*

Repetición de fases : tiempo.

Repetición de *intervalo* entre las fases : reloj.

Repetición de posición : espacio ; movimiento ; reproducción de *la posición ;* propagación de *la posición.*

Repetición de un punto : reproducción del punto ; propagación del *punto ;* movimiento del punto.

Se ve claramente cómo *la repetición* es *la base fundamental.*

Si se reflexiona, siguiendo por este camino se percibirá *que todas nuestras percepciones sin excepción, se fundan en la repetición.* La física entera : sonido, luz, electricidad, calor, etc. No hay excepción. *Una invariación universal. Nuestro universo es un continuum de repetición.*

Basándose en esta *invariante fundamental* es posible arrancar el concepto de la *densificación infinitesimal,* como resultado de la *repetición de una acción infinitesimal,* o sea : la *reproducción de especie* como efecto de la *repetición de la densificación,* lo cual exige una *propagación, posible únicamente* en la forma de *acción sylvestriana* que se explicará.

Insistimos y no cansamos en repetirlo : es absolutamente imprescindible — necesario — penetrarse a fondo de la *verdad, invariante, real, absoluta* que encierra la *repetición* y de comprender sus ramificaciones *ad infinitum* en todas direcciones ; y que *la esencia* de una repetición es *la exclusión absoluta de la coincidencia.*

Entonces se comprenderá cómo es que *toda acción posible* que densifica infinitesimalmente su traza en el *continuum* mayor, *no es otra cosa sino una fase de una sola única acción universal,* la *gravitación.*

Esta es la *estupenda realidad* que descubrió Einstein cuando dijo : la acción que dimensionaliza en el *continuum* de Riemann es la gravitación.

Einstein sólo se ha ocupado de la parte *relativista* del problema, la fase de *repetición de posición.* Nosotros hemos entrado a la consideración de la otra fase más fundamentalmente importante para la conciencia humana, i. e., la *densificación infinitesimal, o historia real absoluta de la gravitación.* La « realidad absoluta » excluye al relativismo ; *todos,* sin excepción, *la vemos de la misma manera.* Como dijimos del doctor S. Johnson : golpeamos la piedra con el pie para asegurarnos de su existencia, densificada.

La solución del problema está en el cálculo harmónico, especialmente en su aplicación tensorial, o sea lo que se ha llamado « harmonización tensorial ».

Intuitivamente, se ve que el problema material está resuelto. Falta formular esta intuición : se trata de composición de propagaciones en una focalización.

Einstein formuló su ecuación de « gravitación » especulando sobre *una analogía* entre *electricidad* y *materia*. Se ha de ver cómo la *repetición* conduce a la explicación amplia de esta « analogía » y cómo conduce a la misma ecuación de Einstein.

Es menester recordar siempre que *una repetición es una propagación.*

CAPÍTULO SEXTO

Simetría de tensores

Esta simetría no es otra sino la que caracteriza a las formas lineales o multilineales invariantes. Se presentan sólo dos casos : simetría o levo-simetría. En el primer caso podemos cambiar las variables entre sí sin alterar el valor del tensor, y en el segundo, hay cambio de signo para cada permutación impar. La analítica por un lado, y el cálculo vectorial por otro, nos permiten clasificar los tensores levo-simétricos, covariantes aparte, como tensores lineales de 1°, 2°, ..., n° orden. Los tensores que tienen la forma conocida :

$$a_{ik} = \alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i,$$

o si trabajamos con los componentes de los desplazamientos,

$$\xi^{ik} = \xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i = \begin{vmatrix} \xi^i & \eta^i \\ \xi^k & \eta^k \end{vmatrix}$$

representan *un área, una rotación,* etc. Quiere decir que siendo

$$Q(\xi) = \xi_i\xi^i = g_{ik}\xi^i\xi^k = (X \, . \, X) = X^2,$$

o sea : el cuadrado de la magnitud lineal del desplazamiento, será

$$\frac{1}{2}\xi^{ik} \cdot \xi_{ik}$$

en que

$$\xi^{ik} = -\xi^{ki},$$

o sea

$$g_{1i}g_{2k}\xi^{12}\xi^{ik} = (g) \cdot |\xi^{12}|^2$$

$i, k = 1, 2.$

$$\sqrt{g} \cdot |\xi^{12}|,$$

igual al área del paralelogramo construído con los ξ. Análogamente,

$$g_{1i}g_{2k}g_{3l}\xi^{123}\xi^{ikl} = (g)\,|\xi^{123}|^2$$

si $i, k, l = 1, 2, 3$ y de aquí que será, tomando valores positivos :

$$\sqrt{g}\,|\,\xi^{123}\,|$$

igual al volumen del paralelepípedo construído con los ξ. Se ve que la determinante de los (g) es la de los coeficientes $(e_i e_k)$ de la forma métrica fundamental y se percibe su significado volumétrico.

Podemos formar tensores lineales de órdenes superiores al segundo por medio de tensores lineales de primer y segundo orden valiéndonos de las simetrías cíclicas tan conocidas. Así :

$$a_i b_k - a_k b_i = c_{ik}$$

$$a_i\, b_{mn} + a_m b_{ni} + a_n b_{im} = c_{imn},$$

y así como en la teoría de determinantes obtenemos formas covariantes substituyendo *operadores diferenciales* por coeficientes en formas invariantes, etc., aquí también procedemos de idéntica manera, como hemos de ver ahora, al tratar la diferenciación de tensores.

Dado un campo escalar cualquiera $f(x_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots n$, si ponemos

$$\varphi = f(x_i) = f(x)$$

$$d\varphi = \frac{df}{dx_1} dx_1 + \frac{df}{dx_2} dx_2 + \ldots + \frac{df}{dx_n} dx_n$$

$$d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i} dx^i$$

y si transformamos coordenadas de manera que

$$\varphi = f(x) = \bar{f}(\bar{x})$$

$$d\varphi = \sum_{i}^{n} \frac{df}{dx_i} dx_i = \sum_{i}^{n} \frac{d\bar{f}}{d\bar{x}_i} \cdot d\bar{x}_i$$

se revela un campo tensorial de primer orden definido por

$$\sum_{i}^{n} \frac{df}{dx_i} dx_i.$$

Hemos obtenido por medio de la operación vectorial conocida por *grad f* los componentes de un vector, derivados de una escalar φ. Lla-

mando, pues, ξ^i los componentes en una correspondencia lineal tenemos el tensor

$$\sum_i^n \frac{df}{dx_i}\xi^i$$

de primer orden que define un campo tensorial *obtenido de otro escalar* en una forma invariante o independiente de transformaciones lineales. Sabemos bien que los dx_i se transforman en forma contragrediente a los vectores básicos, de suerte que los $\frac{df}{dx_i}$ son componentes covariantes, etc. El lector se percatará inmediatamente del significado de los dx_i como *coordenadas* relativas de un punto P′ vecino a P y, por lo tanto, como componentes de un desplazamiento infinitesimal PP′.

Obtenemos así, por diferenciación, un campo tensorial de primer orden de un campo escalar (tensorial de orden cero). La diferenciación aumenta el orden tensorial en una unidad.

Fácil es extender el método a cualquier orden tensorial eligiendo para el efecto *vectores constantes,* cuyos componentes son independientes del lugar; el tensor queda así reducido a una invariante, cuyo valor invariante varía de un punto P a otro vecino P′

$$\left(\frac{df_m{}^l}{dx_r}\right)\xi^m\eta_l\,(\zeta^r)$$

correspondiendo (ζ^r) a dx_r, etc.,

$$\frac{df_m{}^l}{dx_r}=f_{mr}{}^l$$

o

$$\sum_{lmr}\frac{df_m{}^l}{dx_r}\xi_l\eta^m\zeta^r=\sum_{lmr}f_{mr}{}^l\xi_l\eta^m\zeta^r, \text{ etc.,}$$

todo lo cual no necesita mayor explicación.

La diferenciación nos permite obtener de *un campo tensorial dado, otro de un orden más elevado en una unidad y por un medio que deja relacionado los dos campos en forma invariante.*

Siendo:

$$\frac{du_i}{dx_k}=u_{ik}$$

fácilmente obtenemos:

tensor lineal de segundo orden

$$\frac{du_i}{dx_k} - \frac{du_k}{dx_i} (= \text{rot.});$$

tensor simétrico de segundo orden

$$\frac{du_i}{dx_k} + \frac{du_k}{dx_i};$$

invariante escalar

$$\frac{du^i}{dx_i} = \text{divergencia} = \text{U}.$$

Obtenemos de

$$\frac{d\text{S}_i^k}{dx_k} = \text{S}_i'$$

los componentes de un vector.

Si

$$a_i b_k - a_k b_i = c_{ik}$$

substituyendo $\frac{d}{dx_i}$ por b_i, etc.:

$$\frac{d}{dx_k} a_i - \frac{d}{dx_i} a_k = (\text{rot.}).$$

Análogamente en

$$a_i b_{kl} + a_k b_{li} + a_l b_{ik} = c_{ikl}$$

si $\frac{d}{dx_i} = a^i$, etc.:

$$\frac{db_{kl}}{dx_i} + \frac{db_{li}}{dx_k} + \frac{db_{ik}}{dx_l}$$

es un tensor lineal de tercer orden, etc.

Por medio de la diferenciación hemos formado tensores lineales de segundo y tercer orden; uno, el de segundo orden, corresponde a la operación *rot* del cálculo vectorial, y el otro es un tensor que se anula si el de segundo orden del cual deriva es una rotación.

No hay más: el cálculo tensorial en un espacio plano euclideano queda terminado con el análisis o diferenciación.

Imposible mayor sencillez. Las formas multilineales homogéneas han atraído siempre la atención de geómetras y pronto hemos de ver de qué manera completa y admirable se aplican a la física.

Weyl da como ejemplo de puro cálculo tensorial la deducción de

las ecuaciones de Euler referentes a un sistema en rotación al rededor de un punto (pivote) fijo y libre de acción de fuerzas exteriores, sistema rígido, se entiende. Usando una notación ya clásica recordaremos que las ecuaciones de Euler son:

$$I_z = \sum m\,(x^2 + y^2); \qquad I_y = \sum m\,(x^2 + z^2); \qquad I_z = \sum m\,(y^2 + z^2)$$

$$\left.\begin{aligned} I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\,\omega_y\omega_x &= F_y x - F_x y \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\,\omega_x\omega_z &= F_x z - F_z x \\ I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\,\omega_z\omega_y &= F_z y - F_y z \end{aligned}\right\} \text{Momentos de fuerza respecto a los tres ejes de coordenadas.}$$

Si llamamos T_i^* los momentos totales de inercia respecto a los ejes coordenados y T_i los momentos componentes se ve que

$$T_3^* = T_1 + T_2; \qquad T_2^* = T_1 + T_3; \qquad T_1^* = T_2 + T_3 \left\{\begin{aligned} z &= 3 \\ y &= 2 \\ x &= 1. \end{aligned}\right.$$

Como en el caso que tratamos no obran fuerzas exteriores tenemos:

$$\text{Momentos de fuerza} = 0$$

y, por lo tanto, los primeros miembros de las ecuaciones anteriores son respectivamente iguales a cero.

Pero conocemos el momento de fuerza relativamente a un punto fijo, tensorialmente, así pues:

$$q_{ik} = \sum (p_i\xi_k - p_k\xi_i) = 0$$

y siendo:

$$L_{ik} = \sum_m m\,(u_i\xi_k - u_k\xi_i)$$

$$\frac{dL_{ik}}{dt} = q_{ik} = 0$$

que encierra las ecuaciones de la mecánica clásica. Siendo (u^i) los componentes contravariantes del vector velocidad de un punto P distante del punto O: $\overline{OP}$ de componentes (ξ^i). Los L_{ik} expresan las componentes del momento de la cantidad de movimiento respecto a O, *sumado* para todos los elementos de masa escalar *m*, y que siendo a distribución continua vendría dada por una integral en vez de $\sum$.

Busquemos de establecer una invariante que comprenda todo el

movimiento. Recordando que si (v^{ri}) son las componentes de la velocidad angular :

$$u^i = \sum v_r{}^i \xi^r = \sum v^{ir} \xi_r, \text{ etc.}$$

$$\sum_m m u_i \xi_k = \mathrm{H}_{ik} = \sum_m m \xi_k \sum_r v_{ir} \xi^r = \sum_m m \xi_k \sum_r v_i{}^r \xi_r$$

y si sobreentendemos la suma de masas tenemos :

$$\mathrm{H}_{ik} = \sum_r m v_i{}^r \xi_k \xi_r \qquad \text{pero} \qquad \mathrm{T}_{rk} = \sum_m m \xi_k \xi_r$$

$$\mathrm{H}_{ik} = \sum_{mr} m v_i{}^r \xi_k \xi_r = \sum_r v_i{}^r m \xi_k \xi_r = \sum_r v_i{}^r \mathrm{T}_{kr},$$

o sea, brevemente, sumando m y r solamente :

$$\mathrm{H}_{ik} = v_{ir} \mathrm{T}_k{}^r.$$

Por otra parte conviene notar para más adelante que los

$$\mathrm{H}_{ik} = \sum_m m u_i \xi_k = \sum_m m \cdot \frac{d\xi_i}{dt} \cdot \xi_k,$$

o si suprimimos el signo sobreentendido de suma de masas para todo el sistema :

$$m \frac{d\xi_i}{dt} \cdot \xi_k = \mathrm{H}_{ik}.$$

Como tenemos

$$\mathrm{L}_{ik} = \sum_m m (u_i \xi_k - u_k \xi_i)$$

podemos evidentemente poner, contrayendo :

$$\frac{1}{2} \mathrm{L}_{ik} w^{ik} = \mathrm{H}_{ik} w^{ik} = \mathrm{H} = \text{invariante}$$

si elegimos un tensor levo-simétrico de segundo orden, constante relativamente al tiempo t :

$$w^{ik} = - w^{ki},$$

de aquí :

$$\frac{d\mathrm{H}}{dt} = 0.$$

La ley del movimiento está resumida en esta ecuación inalterable o independiente del sistema de representación.

Hay que observar ahora que el sistema de referencia está en el espacio y no forma parte del cuerpo, de manera que los momentos de

inercia, dependiendo de la distribución de masas, variarán con toda variación de ésta, esto es: cambiando la distribución con el tiempo, los momentos variarán con el tiempo. Podemos muy fácilmente salvar este inconveniente eligiendo un sistema de referencia fijo en el cuerpo. De esta manera los (T_{ik}) son constantes.

Ahora bien, si sobrerayamos las letras para dar a entender que se refieren a las magnitudes apreciadas en el sistema espacial (viejo sistema de referencia) y usamos las correspondientes sin distintivo para el nuevo sistema de referencia en el cuerpo, podemos escribir:

$$\frac{d\overline{w}^{ik}}{dt} = 0$$

por definición; en cambio los (w^{ik}) son funciones del tiempo. La invariante o tensor cero, nos da:

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

$H = H_{ik}w^{ik}$ en el nuevo sistema, etc. Por consiguiente:

$$\frac{dH}{dt} = w^{ik}\frac{dH_{ik}}{dt} + H_{ik}\frac{dw^{ik}}{dt} = 0$$

procedemos a determinar a $\frac{dw^{ik}}{dt}$ y también a precisar el valor de nuevas magnitudes auxiliares. Elijamos dos traslaciones o vectores *arbitrarios,* constantes (X, Y) en el cuerpo; esto es, *independientes del tiempo.* Sean $(\xi_i\eta_i)$ sus componentes covariantes (manifiestamente que estos $(\overline{\xi}_i\overline{\eta}_i)$ en el viejo sistema serán variables con el tiempo), así pues, pongamos:

$$w^{ik}\xi_i\eta_k = \overline{w}^{ik}\overline{\xi}_i\overline{\eta}_k$$

siendo

$$\frac{d\overline{w}^{ik}}{dt} = 0$$

resulta:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{d\eta_i}{dt} = 0$$

y

$$\frac{dw^{ik}}{dt}\cdot\xi_i\eta_k = \overline{w}_{ik}\left(\overline{\eta}_k\frac{d\overline{\xi}_i}{dt} + \overline{\xi}_i\frac{d\overline{\eta}_k}{dt}\right)$$

pero

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \bar{u}_i; \qquad \frac{d\eta_k}{dt} = \bar{u}_k$$

$$\bar{u}_i = \bar{v}_{ir}\bar{\xi}^r; \qquad u_k = v_{ks}\bar{\eta}^s;$$

eligiendo a r como índice común tenemos:

$$\frac{d\bar{\xi}_i}{dt} = \bar{u}_i = \bar{v}_{ir}\bar{\xi}^r; \qquad \frac{d\bar{\eta}_k}{dt} = \bar{u}_k = \bar{v}_{kr}\bar{\eta}^r$$

y, por lo tanto:

$$\frac{dw^{ik}}{dt}\xi_i\eta_k = \bar{w}^{ik}\left(\bar{\eta}_k\bar{v}_{ir}\bar{\xi}^r + \bar{\xi}_i\bar{v}_{kr}\bar{\eta}^r\right) = \bar{w}^{ik}\left(\bar{v}_{ir}\bar{\xi}^r\bar{\eta}_k + \bar{v}_{kr}\bar{\xi}_i\bar{\eta}^r\right),$$

y como esta forma es una invariante podemos suprimir rayas, i. e.:

$$\frac{dw^{ik}}{dt}\cdot\xi_i\eta_k = \bar{w}^{ik}\left(\bar{v}_{ir}\bar{\xi}^r\bar{\eta}_k + \bar{v}_{kr}\bar{\xi}_i\bar{\eta}^r\right) = w^{ik}\left(v_{ir}\xi^r\eta_k + v_{kr}\xi_i\eta^r\right);$$

si ahora se tiene en cuenta el carácter de los H_{ik} y la arbitrariedad de los (ξ_i, η_k) podemos escribir en forma general:

$$\frac{dw^{ik}}{dt}H_{ik} = w^{ik}\left(v_i^r H_{rk} + v_k^r H_{ir}\right)$$

quiere decir que podemos tomar los números H_{ik} correspondientes a los $(\xi_i \cdot \eta_k)$, lo cual es manifiesto, si remonta el lector al significado de estas magnitudes. Resulta, pues:

$$w^{ik}\frac{dH_{ik}}{dt} + H_{ik}\frac{dw^{ik}}{dt} = 0$$

$$w^{ik}\frac{dH_{ik}}{dt} + w^{ik}\left(v_i^r H_{rk} + v_k^r H_{ir}\right) = 0$$

$$w^{ik}\left\{\frac{dH_{ik}}{dt} + v_i^r H_{rk} + v_k^r H_{ir}\right\} = 0;$$

como esta ecuación se mantiene para cualquier vector levo-simétrico de componentes w^{ik}, forzosamente será:

$$w^{ik} = 0$$

y así por levo-simetría:

$$\frac{dH_{ik}}{dt} + v_i^r H_{rk} + v_k^r H_{ir} - \frac{dH_{ki}}{dt} - v_k^r H_{ri} - v_i^r H_{kr} = 0$$

esto es:

$$\frac{dH_{ik}}{dt} - \frac{dH_{ki}}{dt} + \left\{ \begin{array}{c} v_i{}^r H_{rk} + v_k{}^r H_{ir} \\ - v_k{}^r H_{ri} - v_i{}^r H_{kr} \end{array} \right\} = 0.$$

Recordando ahora que:

$$H_{ir} = v_{is} T_r{}^s = v_i{}^s T_{rs}$$

y

$$v_k{}^r H_{ir} = v_k{}^r v_i{}^s T_{rs}$$

como

$$T_{rs} = T_{sr}$$

forzosamente por simetría entre i, k, como está a la vista:

$$v_k{}^r v_i{}^s T_{rs} = v_k{}^s v_i{}^r T_{sr},$$

que es lo mismo que cambiar i por k, etc. Así:

$$v_k{}^r H_{ir} = v_i{}^r H_{kr}$$

$$v_k{}^r v_i{}^s T_{rs} = v_i{}^r v_k{}^s T_{sr}$$

lo cual hace desaparecer dos de los términos del paréntesis grande y queda:

$$\frac{d}{dt}(H_{ik} - H_{ki}) = v_i{}^r H_{rk} - v_k{}^r H_{ri}.$$

Sigue pues:

$$\frac{d}{dt}(v_{ir} T_k{}^r - v_{kr} T_i{}^r) = v_i{}^r H_{rk} - v_k{}^r H_{ri} = v_i{}^r v_{rs} T_k{}^s - v_k{}^r v_{rs} T_i{}^s,$$

pero como fácilmente:

$$v_i{}^r v_{rs} T_k{}^s = v_i{}^r v_r{}^s T_{ks} = v_i{}^r v_r{}^s g_{rs} T_k{}^r = g_{rs} v_i{}^r v_r{}^s T_k{}^r$$

poniendo

$$g_{rs}\, v_i{}^r v_r{}^s = (vv)_{ir}$$

resulta:

$$v_i{}^r v_{rs} T_k{}^s = (vv)_{ir} T_k{}^r;$$

análogamente:

$$v_k{}^r v_{rs} T_i{}^s = v_k{}^r v_r{}^s T_{is} = v_k{}^r v_r{}^s g_{rs} T_i{}^r = g_{rs} v_k{}^r v_r{}^s T_i{}^r$$

$$g_{rs} v_k{}^r v_r{}^s = (vv)_{kr}$$

resulta:

$$v_k^{\ r} v_{rs} \mathrm{T}_i^{\ s} = (vv)_{kr} \mathrm{T}_i^{\ r};$$

reuniendo los términos tenemos finalmente:

$$\frac{d}{dt}(v_{ir}\mathrm{T}_k^{\ r} - v_{kr}\mathrm{T}_i^{\ r}) = (vv)_{ir}\mathrm{T}_k^{\ r} - (vv)_{kr}\mathrm{T}_i^{\ r}.$$

Eligiendo ahora un sistema *normal* cartesiano con direcciones coincidentes con los principales ejes de inercia, sabemos que se tendrá:

$$g_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

$$\mathrm{T}_{ik} = 0 \qquad \text{si} \qquad i \neq k$$

así, pues

$$r = i, \qquad r = k$$

y escribiendo

$$\mathrm{T}_k^{\ k} = \mathrm{T}_k, \text{ etc.}$$

$$\frac{d}{dt}(v_{ik}\mathrm{T}_k^{\ k} - v_{ki}\mathrm{T}_i^{\ i}) = (vv)_{ik}\mathrm{T}_k^{\ k} - (vv)_{ki}\mathrm{T}_i^{\ i}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{T}_k + \mathrm{T}_i)(v_{ik}) = (vv)_{ik}(\mathrm{T}_k - \mathrm{T}_i)$$

$$(\mathrm{T}_i + \mathrm{T}_k)\frac{d(v_{ik})}{dt} = (\mathrm{T}_k - \mathrm{T}_i)(vv)_{ik},$$

que es la ecuación diferencial del movimiento y produce la conocida elíptica en t. La ecuación es independiente de la dimensionalidad o sea, es para n dimensiones; naturalmente sólo tiene significado para 3.

Este problema resuelto sirve como ejercicio de «juego de índices», que es tan necesario en el cálculo tensorial, pero fuera de esto carece de importancia. Ahora trataremos el caso de «tensiones» en un cuerpo elástico, que es de trascendental importancia por ser origen de «los tensores» y permitir formar un concepto claro del significado de estas magnitudes. Mediante el cálculo tensorial, partiendo de una invariante integral y basándose sobre el principio de acción estacionaria de Hamilton, se pueden deducir todas las ecuaciones de la mecánica, como también las del campo electromagnético sin dejar de mencionar las del campo de gravitación, que sintetizan el triunfo mayor de Einstein.

Los textos usuales de cálculo y de mecánica consignan dos teore-

mas que son de gran importancia y aplicación en lo que sigue. Uno de estos es el teorema de Gauss u Ostrogradsky, que relaciona «la carga» contenida dentro de una superficie cerrada y la inducción normal al través de la misma, ligando una integral de volumen expresada por medio de una divergencia (como si dijéramos una dilatación) y una integral de superficie. Si B es una magnitud vectorial, dV un elemento de volumen encerrado por una superficie S, dS el elemento de superficie en un punto P, y B_n la componente de B según la normal exterior a S en P tendremos :

$$\int_v \text{div. B} \,.\, dV = \int_s B_n dS;$$

si fuera la normal interior tendríamos :

$$\int_v \text{div. B} \,.\, dV = - \int_s B_n dS.$$

En el cálculo vectorial si F_x, F_y, F_z son los componentes de una F, según los ejes del sistema normal cartesiano será :

$$\int_v \left(\frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz} \right) dV =$$

$$= \pm \int_s \{ F_x \cos(nx) + F_y \cos(ny) + F_z \cos(nz) \} dS$$

$$F_x \cos(nx) + F_y \cos(ny) + F_z \cos(nz) = (F)_n = F_n, \text{ etc.}$$

El otro teorema es el de Stokes, que relaciona una integral de superficie con una de línea. Lo conocemos desde el estudio de las deformaciones homogéneas y quizá el enunciado más propio del mismo es que cuando la rotación de un vector es nula, éste deriva de un potencial escalar por medio de la operación *grad*. Físicamente se interpreta este teorema diciendo que podemos substituir la rotación de un vector tomada al rededor de una curva cerrada cualquiera por la rotación del mismo, tomada al rededor de todos los paralelogramos infinitesimales en que se puede dividir el área que encierra dicha curva cerrada, *aplicada a una superficie arbitraria*. Vectorialmente, si un subíndice n significa proyección sobre la normal exterior en un punto de una superficie S y si $d\sigma$ es un elemento de curva (la curva cerrada dada), entonces siendo F un vector tendremos :

$$\int_s (\text{rot. F})_n ds = \int_\sigma (F \,.\, d\sigma),$$

si F es una fuerza, la segunda integral es *un trabajo* que, según *sea o no una diferencial total exacta,* nos da la condición de anulación de rota-

ción F. La integrabilidad del segundo miembro implica, *a fortiori*, que F deriva de una potencial escalar por la operación *grad.* Cuando no se anula la rotación nos apercibimos que la integral del desplazamiento perimetral no se anula y entonces $(\text{rot. } F)_n$ mide *una magnitud de intensidad* de gran importancia en el cálculo tensorial.

Si X, Y, Z son tres componentes de vector según los ejes de un sistema normal, se tiene la ecuación conocida :

$$\int_s \left\{ \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) \cos(nx) + \left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}\right) \cos(ny) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) \cos(nz) \right\} ds = \int_\sigma Xdx + Ydy + Zdz.$$

Cuando

$$\frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}; \qquad \frac{dZ}{dx} = \frac{dX}{dz}; \qquad \frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}$$

resultan las conocidas condiciones de integrabilidad, etc. En general si

$$\text{rot. } A = 0 \qquad A = \text{grad. } \varphi,$$

y podríamos añadir :

$$\text{div. } A = 0, \qquad A = \text{rot. } B,$$

$$\text{div. } A = \text{div. rot. } B = 0, \qquad \text{div. rot.} = 0,$$

que se resuelve por la ecuación de Poisson. Pasemos a considerar las tensiones.

TENSIONES

Un cuerpo elástico bajo el efecto de fuerzas de superficie y de volumen toma una forma de equilibrio. Esta forma es la resultante del equilibrio entre dichas fuerzas y la de *cohesión*, o sea resistencia a la deformación. Para expresar matemáticamente este estado de cosas nos valemos del cálculo tensorial, procediendo como sigue : sea J un cuerpo elástico cualquiera en equilibrio, del cual hemos separado un casco de materia dejando en descubierto una superficie Ω. Separando un casco de materia se produce naturalmente una alteración en el estado de equilibrio primitivo, por razones que están a la vista; para evitar que se produzca esta alteración será preciso que substituyamos el casco separado por una fuerza de presión sobre la superficie Ω, y *ad-*

mitir que la acción cohesiva de la materia es una acción de contacto; esto es, se ejerce entre elementos contiguos.

Llamemos T el valor de esta presión por unidad de superficie, en general. Vemos desde ya que T varía de un punto a otro de Ω por efecto de la cantidad de materia que suple, y también varía según la dirección del elemento de superficie sobre el cual actúa. Quiere decir que el valor de T depende del lugar o coordenadas del punto sobre Ω, y de $n =$ dirección de la normal *interior* del elemento de superficie en ese punto; las coordenadas nos fijan el punto sobre Ω y n nos fija la orientación superficial. Designemos con T_n en vez de T esta presión *según la normal interior de un elemento* $d\omega$ *de* Ω. Si $-n$ es la dirección opuesta a n, se ve que un disco infinitesimal de superficie $d\omega$ estaría en equilibrio si se tiene : $T_n = -T_{-n}$. Nos falta repetir que T_n, T_{-n}, etc., *representan siempre presiones por unidad de superficie.*

$$T_n = -T_{-n}.$$

Esta ecuación nos servirá para generalizar resultados obtenidos en un octante determinado del sistema normal de coordenadas cartesianas empleado.

Visto esto, adoptemos un sistema normal cartesiano (Ox_1, x_2, x_3) y en un punto cualquiera P de Ω consideremos un triedro formado por tres segmentos εa_1, εa_2, εa_3 dirigidos paralelamente a OX_1, OX_2, OX_3 respectivamente y en que el factor ε tiende hacia 0. Sean P_1, P_2, P_3 los extremos de estos tres segmentos. Llamemos P_1, P_2, P_3 la base del tetraedro formado y f su área; además, sea n la dirección de la normal interior a esta base y α_1, α_2, α_3 los cosenos directores de la misma. Resulta, pues, que las áreas de las caras del tetraedro son :

$$f; \qquad f\alpha_1 = \frac{1}{2}\varepsilon^2 a_2 a_3; \qquad f\alpha_2 = \frac{1}{2}\varepsilon^2 a_1 a_3; \qquad f\alpha_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_3 a_1 a_2;$$

por donde vemos que el elemento de área es del orden ε^2, y el elemento de volumen es, en consecuencia, del orden ε^3. Desde ya se ve que podemos despreciar el efecto de una fuerza de volumen para formular la condición de equilibrio del tetraedro.

Sean ahora T_n, T_1, T_2, T_3 *las presiones por unidad de superficie que obran en el punto* P *sobre elementos de superficie* $d\omega$ *cuyas normales interiores se dirigen según* n, y OX_1, OX_2, OX_3 respectivamente (paralelos a los ejes coordenados). Y distingamos claramente entre el significado de T_1, T_2, T_3 y el significado de T_{n1}, T_{n2}, T_{n3} : componentes de T_n según

X_1, X_2, X_3 respectivamente. Las presiones que obran sobre las caras y base del tetraedro elemental son, pues:

$$T_n f; \qquad T_1 f\alpha_1; \qquad T_2 f\alpha_2; \qquad T_3 f\alpha_3;$$

y si hay equilibrio, manifiestamente tendremos:

$$T_n f - (T_1 f\alpha_1 + T_2 f\alpha_2 + T_3 f\alpha_3) = 0$$

$$T_n = T_1\alpha_1 + T_2\alpha_2 + T_3\alpha_3 \qquad (1)$$

despreciando el efecto de fuerzas de volumen, como se dijo arriba, por ser de orden superior al segundo de inf. pequeño.

La ecuación (1), en virtud del principio fundamental de ser $T_n = - T_{-n}$, es aplicable a cualquiera de los octantes trirrectangulares del sistema cartesiano adoptado. El carácter tensorial de T está a la vista, pero antes de formular su expresión matemática vamos a deducir una consecuencia de (1) de importancia. Proyectemos a (1) sobre los ejes coordenados

$$(T_n)_1 = T_{n1}; \qquad (T_n)_2 = T_{n2}; \qquad (T_n)_3 = T_{n3};$$

de aquí si ponemos:

$$(T_n)_1 = (T_1')_n; \qquad (T_n)_2 = (T_2')_n; \qquad (T_n)_3 = (T_3')_n;$$

y ahora sumamos para hallar las expresiones de los componentes de *presión total sobre* Ω, etc., vemos que:

$$\int_\Omega (T_n)_1 d\omega = \int_\Omega (T_1')_n d\omega; \qquad \int_\Omega (T_n)_2 d\omega = \int_\Omega (T_2')_n d\omega, \text{ etc.,}$$

pero según el teorema de Gauss o Ostrogradsky:

$$\int_\Omega (T_n)_1 d\omega = \int_\Omega (T_1')_n d\omega = - \int_v \text{div. } T_1' \,.\, dV, \text{ etc.}$$

Así, pues, vemos, en general, que se tiene:

$$\int_\Omega T_n d\omega = - \int_v \text{div. } T' \,.\, dV,$$

o sea que la presión superficial equivale a una *fuerza de volumen*, cuya *densidad* es div. T' (por unidad de volumen). El signo (—) en segundo miembro responde al hecho que se trata de la dirección de la normal interior n al elemento $d\omega$.

Llamemos ahora T_{i1}, T_{i2}, T_{i3} *los componentes de* T_i según los ejes coordenados y tomemos dos *traslaciones unitarias* en P de componentes (ξ^i) (η^k) respectivamente. Manifiestamente

$$T_{xy} = T(X \,.\, Y) = \sum_{ik=1}^{3} T_{ik} \,.\, \xi^i \eta^k \qquad (2)$$

representa *la componente según la dirección* (η) de la presión T, por unidad de superficie, que obra sobre *un elemento cuya normal interior se dirige según* (ξ). Aquí, pues, tenemos una forma lineal que nos da *la tensión* en un punto cualquiera de Ω, y que tiene un significado independiente del sistema de coordenadas: *un tensor,* que es *la tensión.* Es de segundo orden y demostraremos que es simétrico o que

$$T_{ik} = T_{ki}.$$

La ecuación (2) representa *un campo tensorial simétrico de segundo orden.* Si en vez de dos traslaciones unitarias, (ξ) (η), tomáramos una sola (ξ) *arbitraria,* el campo se expresaría en la forma (de acuerdo con lo explicado ya) siguiente:

$$\frac{\sum_{ik} T_{ik}\xi^i\xi^k}{\sum_{ik} g_{ik}\xi^i\xi^k}.$$

Simetría de T. — Formemos el vector T_1' con *las componentes* T_{1i}, T_{2i}, T_{3i}. Ahora bien, si T_n es la presión que obra por unidad de superficie sobre un elemento cuya normal interior es n, tendremos como ya se ha visto:

$$(T_n)_1 = (T_1')_n \qquad (T_n)_2 = (T_2')_n, \text{ etc.}$$

de aquí que

$$\int_\Omega (T_n)_1 d\omega = \int_\Omega (T_1')_n d\omega = -\int_v \text{div.. } T_1' \,.\, dV. \tag{3}$$

Formemos el vector

$$p_i = -\frac{dT_i^k}{dx_k} = -\text{div. } T_i' \qquad i = 1, 2, 3$$

tendremos:

$$\int_\Omega (T_n)_1 d\omega = \int_v p_1 \,.\, dV,$$

o, en general:

$$\int_\Omega T_n d\omega = \int_v p dV,$$

en que la integración se aplica a toda la superficie Ω en un caso y a todo el volumen del casco de materia principal, o cuerpo, en el otro; para evitar confusión llamaremos J al volumen de este cuerpo. Tenemos, pues:

$$\int_\Omega T_n d\omega = \int_J p dV.$$

Supongamos ahora que k es la fuerza de volumen en acción en J, la primera condición de equilibrio exigiría que

$$\int_J (p + k)\, dV = 0,$$

cualquiera que fuese J, lo cual da, pues:

$$p = -k,$$

y de aquí:

$$\int_\Omega T_n d\omega = \int_J p dV = -\int_J k dV.$$

Si llamamos r el radio vector $\bar{OP}$ de un elemento de Ω en P, la ecuación de momentos será vectorialmente:

$$\int_\Omega [r \,.\, T_n]\, d\omega + \int_J [r \,.\, k]\, dV = 0$$

$$\int_\Omega [r T_n]\, d\omega = \int_J [rp]\, dV;$$

de aquí, eligiendo una componente:

$$\int_\Omega [rT_n]_1 d\omega = \int_J [rp]_1 dV = \int_J (x_2 p_3 - x_3 p_2)\, dV,$$

pero según (3)

$$\int_\Omega [rT_n]_1\, d\omega = \int_\Omega (x_2 T_3' - x_3 T_2')_n d\omega = -\int_J \text{div.}\, (x_2 T_3' - x_3 T_2')\, dV$$

por el teorema de Gauss, y recordando que

$$(T_n)_1 = (T_1')_n$$

$$-\int_J \text{div.}\, (x_2 T_3' - x_3 T_2')\, dV = \int_J (x_2 p_3 - x_3 p_2)\, dV$$

$$-\text{div.}\, (x_2 T_3' - x_3 T_2') = x_2 p_3 - x_3 p_2$$

es, pues, la segunda condición de equilibrio, que da:

$$-\{ x_2 \text{div.}\, T_3' - x_3\, \text{div.}\, T_2' + (T_3' \,.\, \text{grad}\, x_2) - (T_2' \,.\, \text{grad}\, x_3) \} = [r \,.\, p]_1.$$

Como

$$-p^i = \text{div.}\, T_i'$$

se tiene fácilmente:

$$x_2 p_3 - x_3 p_2 + (T_3')_2 - (T_2')_3 = x_2 p_3 - x_3 p_2,$$

de aquí:

$$(T_3')_2 = (T_2')_3$$

y los demás componentes siguen, pero $(T_3')_2$ = componente de T_3' según eje Ox_2 o sea:

$$(T_3')_2 = T_{32}, \text{ etc.}$$

$$T_{12} = T_{21}; \qquad T_{23} = T_{32}; \qquad T_{13} = T_{31},$$

lo cual demuestra la simetría del tensor QED.

Hemos hallado una expresión matemática *completa* y *exacta* para representar el estado de cosas en un cuerpo elástico bajo las condiciones descritas *ab initio*. Descubrimos que un estado *de tensión* en la superficie equivale a una fuerza de volumen cuya densidad P (por unidad de volumen) se expresa en términos de un tensor simétrico de segundo orden. Valiéndonos de *componentes mixtos :*

$$-p_i = \frac{dT_i^k}{dx_k}; \qquad \frac{\sum T_{ik}\xi^i\xi^k}{\sum g_{ik}\xi^i\xi^k}.$$

Supongamos que la *presión por unidad de volumen es constante en todas direcciones :* recordando el tensor unitario métrico :

$$T_i^k = \delta_i^k p; \qquad -p_i = \frac{dp}{dx_i}.$$

Esta aplicación del cálculo tensorial es precisamente la que ha dado origen al nombre de « tensor ».

Desarrollo. —

$$\begin{aligned}\sum_{ik} T_{ik}\xi^i\xi^k &= T_{11}\xi^1\xi^1 + T_{12}\xi^1\xi^2 + T_{13}\xi^1\xi^3\\ &+ T_{21}\xi^2\xi^1 + T_{22}\xi^2\xi^2 + T_{23}\xi^2\xi^3\\ &+ T_{31}\xi^3\xi^1 + T_{32}\xi^3\xi^2 + T_{33}\xi^3\xi^3\\ &= T_{11}|\xi^1|^2 + 2T_{12}\xi^1\xi^2 + T_{22}|\xi^2|^2 + 2T_{13}\xi^1\xi^3 + 2T_{23}\xi^2\xi^3 + T_{33}|\xi^3|^2.\end{aligned}$$

en que reconocemos la forma cuadrática *Pitagórica de desarrollo.*

Para n dimensiones se procede de idéntica manera : $i, k = 1, 2, ..., n$ en cada caso tendremos la componente de la tensión según una determinada dirección (k), que obra según otra dirección (i) normal a un elemento.

Si la presión es igual en toda dirección y también igual en todo punto del campo, tendremos un campo a presión constante; esto es :

$$p\delta_i^k = T_i^k = \text{constante}$$

$$p_i = 0$$

o sea :

$$\frac{dS_i^k}{dx_k} = \frac{dp}{dx_k} = 0,$$

hemos escrito S por T — lo mismo.

Resulta que los

$$T_{ik} = \text{constante}.$$

Hemos de ver que este estado de cosas caracteriza un espacio *newtoniano* o *galileano*, i. e., *un espacio libre.*

Nos percatamos, pues, que el principio de inercia está involucrado de cierta manera en esta P = *constante,* o estos T_{ik} = *constantes.* En otras palabras, siendo la inercia de un cuerpo una propiedad de su masa, o *energía densificada,* y dependiendo la masa de la densidad y volumen, habrá una interacción entre campo y materia regulada por el parámetro p; como si dijéramos matemáticamente que p distingue la clase de la conexión afín en un sistema.

Como si un cuerpo que se traslada uniformemente en línea recta *llevara consigo una parte del campo* (la parte que alcanza a afectar por sus propias virtudes) y la magnitud de esta *parte de campo* dependiera del parámetro P = T.

Deducimos claramente qué « tensores » poseen una propiedad especial, en virtud de la cual podemos expresar estados físicos con admirable precisión y generalidad. El estado de tensión en *un cuerpo material* bajo el efecto de fuerzas de volumen puede ser representado por *un tensor simétrico de segundo orden.* Este tensor nos permite conocer *en un punto cualquiera del cuerpo* el estado de tensión, sea tractiva o compresiva, que existe en una dirección arbitraria dada : esto es, el estado *tensorial* en cada punto del cuerpo. Quiere decir que si sólo nos ocupáramos de tensiones, el tensor simétrico de segundo orden puede substituir al cuerpo que se convierte en una fracción de campo tensorial.

Podríamos, en general, decir que un tensor simétrico de segundo orden tiene la magnitud de una intensidad, y que es la variación de esta intensidad entre un punto y otro vecino que da la expresión de « densidad de fuerza », esto es :

$$\frac{dT_i^k}{dx_k} = -p_i \qquad i, k \text{ variando de 1 a } n,$$

en que p_i son las componentes covariantes de la densidad de fuerza que obra en el sistema. Una densidad de fuerza, o sea « una fuerza

volumétrica », tiene así el aspecto de una divergencia tensorial en un campo de componentes mixtas. Esto es muy importante de observar puesto que percibimos que si un tensor simétrico de segundo orden representa un estado de tensión, la variación de este tensor de un punto a otro del campo representa un estado de fuerza. Einstein observó esta propiedad y aplicó sus efectos al tensor métrico del « espacio pitagórico» riemeniano adoptado *como expresión de la distancia entre dos puntos universales :*

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n} g_{ik} dx_i dx_k,$$

en que tomamos dos puntos vecinos, o inf. cercanos. La *variación de los g_{ik} contiene la ley de fuerza o acción en el campo de gravitación* definido por ese tensor simétrico fundamental unitario. Lo más asombroso de todo esto es que la experiencia confirma la exactitud de los resultados teóricos obtenidos así por puro análisis, y *simultáneamente esta confirmación deja establecida de una vez para todas, la veracidad del postulado métrico pitagórico que tiene la forma cuadrática, entre las infinitas que son posibles, como expresión de distancia entre dos puntos !* En un sistema normal ésta sería sencillamente para el espacio euclideano :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (\xi^i)^2 \qquad \varepsilon_i = \pm 1,$$

como vimos al tratar el teorema de Sylvester. En otras palabras, la distancia entre dos puntos en nuestro mundo cuadridimensional es *una tensión,* o posee el aspecto de tensión. De suerte que, si nuestro espacio *fuese heterogéneo,* la distancia entre dos puntos exigiría como dato complementario *la dirección* en que se mide para que tuviera sentido preciso. Todos comprendemos intuitivamente y por la evidencia de nuestros sentidos, que la materia es una « densificación de energía ». Quiere decir, que un fierro, por ejemplo, que tiene la característica de « solidez » puede convertirse en un fluido con las características de un gas con simplemente *alterar el estado del campo convenientemente.* Analizando una densificación nos apercibimos que, en último grado, depende de la asociación de *puntos de energía* y que estos puntos se relacionan entre sí por *la distancia* que los separa. Entendemos por *esta distancia algo diferente* de ese concepto que fluye de la ecuación *puramente espacial* conocida, tridimensional :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

en el espacio euclideano, puesto que en nuestro universo o dominio espacial-temporal ésta sería *supuesto plano :*

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2,$$

o, en general :

$$-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = ds^2,$$

debiendo el lector meditar profundamente sobre el hecho que *la dimensión temporal de nuestro mundo varía constantemente.* Palpamos en consecuencia, después del triunfo einsteiniano, que la distancia cuadridimensional o *espacial-temporal entre dos puntos de energía* encierra algo más que « metros y centímetros », y que aquello que encierra está contenido en los coeficientes o componentes del tensor simétrico de segundo orden métrico, g_{ik}.

Nuestras percepciones cerebrales exigen *la existencia* como base fundamental de *una magnitud;* ya se ha observado esto, y es por esto que *toda magnitud tiene que contener una dimensión temporal.* Una magnitud es una repetición. Podemos suponer la dimensión temporal como *imperceptible conscientemente* y las demás dimensiones *perceptibles conscientemente,* etc.

Pronto hemos de ver cómo estos coeficientes aplicados al caso de tres dimensiones definen las diversas geometrías sobre superficies en general y, cómo Riemann, generalizando el concepto de Gauss, descubrió que definen las diversas geometrías de los dominios espaciales curvos o amorfos, de *n* dimensiones. Cuando estos coeficientes son constantes tenemos un espacio plano euclideano multidimensional y cuando son variables tenemos los espacios curvos. El espacio plano de g_{ik} constantes tiene un aspecto de *campo de tensión constante en todo punto y en toda dirección : un espacio galileo-newtoniano libre* o, si se quiere, *un espacio euclideano afín.* Este campo es perfectamente homogéneo y de curvatura cero, es el espacio límite de los espacios esféricos (a curvatura constante) y es caracterizado por « traslaciones rectilíneas » como transformaciones congruentes.

Curvatura espacial y *fuerza volumétrica* son « dos maneras diferentes de expresar una misma cosa » ; uno es lenguaje geométrico y el otro lenguaje « físico ».

Es de la mayor importancia fijarse que *un tensor simétrico de segundo orden* de componentes $T_{ik} = T_{ki}$, tiene los siguientes aspectos como magnitud :

1° Contorsión material o deformación (ver textos de elasticidad) ;

2° Inercia giroscópica mecánica ;

3° Tensiones;

4° Cuadrado de una magnitud lineal o *proyección* de una magnitud lineal sobre otra: un vector sobre otro.

Mientras que los

$$H_{ik} = \gamma_{ik} - \gamma_{ki}$$

significan: *rotación, área* y *dirección.*

Un sistema material determinado por los

$$T_{ik} \quad \text{y} \quad H_{ik}$$

puede ser un sistema dotado de *rotación contorsional* si tiene partes flúidas.

DIGRESIÓN 0.56

Repetición « ad nauseam »

La *repetición* tiene en las matemáticas como símbolo, el *número.* Se ha explicado esto. Pero este importante concepto, producto mental de una acción del *continuum* mayor, contiene una invariante fundaviz: *la imposibilidad de coincidencia.*

Los dos puntos clásicos que « coinciden » destruyen el concepto básico del *dos.*

Aquí, pues, es donde se descubre el origen por *dura necesidad* de esas dos cosas: *tiempo* y *espacio.* No hay necesidad de demorar en en esto, pues está a la vista.

Cuando pretendemos remontar al más allá de *la repetición* es cuando se tropieza con el « muro chino ». Aquí recordaremos palabras de Locke: se trata de un problema que trasciende al poder intelectual humano. La verdad es que se trata de fenómenos en un *continuum mayor* que contiene al nuestro como *continuum* menor. No nos atrevemos a penetrar allí, por lo de Sófocles (aparte del castigo de Sísifo ya mencionado):

φεῦ, φεῦ· φρονεῖν ὡς δεινὸν, ἔνδα
μὴ τέλη λύει φρονοῦντι·

Es, pues, en estas *profundidades* que tiene su raíz *la geometría,* por medio del concepto *número.*

Ahora, otra invariante fundamental aparece cuando se analiza el concepto de *reproducción* al lado del de *repetición.* Vemos que no pode-

mos *reproducir un punto* de nuestro *continuum* puntual-matemático. Podemos únicamente valernos de los *puntos existentes* y, mediante « una acción », *densificarlos.* Pero *podemos reproducir una densificación ya realizada !* Entonces decimos : *reproducción* = densificación repetida = *número por densificación.*

Pero cuando el *número* pasa de dos necesariamente la *reproducción* toma el aspecto de *propagación por reproducción.* Nuestro cerebro ahora revela *un vicio,* sugiriendo la idea del número *negativo.*

Es evidente la inadmisibilidad del número negativo como símbolo de repetición y esto lo dejó establecido Riemann en otros términos, cuando procedió a formular la métrica del *continuum* espacial. Las geodésicas que arrancan de un origen deben aumentar en todas direcciones a partir desde el mismo, de suerte que aparecen con un valor mínimo en este punto. El origen del concepto *negativo* es motivo de estudio en otra digresión.

Deducimos, por lo tanto, que si una reproducción exige como fundamento, una distancia espacial-temporal, ésta debe ser independiente de sentido. Se impone, pues, la cuádrica, o la cuadrática, pitagórea, por este concepto. Ya se verá que se impone también por el concepto sylvestriano de « dimensionalización normal ». Pero aplazaremos esto momentáneamente.

Ahora compararemos las siguientes expresiones, *sin atribuirles significados físicos :*

$$\begin{cases} c_x = \nu^1\lambda_1 + v^2\lambda_2 + \nu^3\lambda_3 + \ \dots\ + \nu^h\lambda_h + \ \dots\ + \ \dots \\ X = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_3 + \ \dots\ + \xi^h e_h + \ \dots\ + \ \dots \end{cases}$$

¿ Qué es lo que se descubre ? Sigamos. Adóptese a c como *unidad básica* einsteiniana de « propagación » en nuestro *continuum* mayor, que supondremos de condiciones planas euclideanas. Así, pues, si escribimos

$$c = \nu\lambda$$

$$X_c = X = \sum_{1}^{n} \xi^i \lambda_i$$

tenemos convertido al vector X en un *tensor de primer orden* representante de una *propagación* X.

DIGRESIÓN 0.565

La densificación

Incumbe explicar este inmenso proceso de la naturaleza entera y del universo. La densificación es un proceso *infinitesimal,* rigurosamente, y relativamente a nuestro orden humano finito de magnitudes. Es la obra de una *acción de contacto,* i. e., *una repetición.*

Todos conocemos las tentativas de lord Kelvin y de otros eminentes físicos para poder explicar la propagación longitudinal de la luz sin molestar las teorías corrientes de Fresnel, etc., y todos recordamos la sentencia de Schuster acerca de la deficiencia de una teoría que no explica los detalles fásicos de una propagación. La repetición en la naturaleza, como principio básico invariante de todas las percepciones conscientes humanas, permite formular una teoría de propagación general que abarca «la luminosa» como caso particular.

Ya se ha notado cómo una velocidad finita en un orden de magnitud puede convertirse en infinita con sólo alterar la unidad lineal. Se aplicó esto a un ejemplo práctico de un tren en marcha. Precisamente es en este principio de «indeterminación» por discrepancia de órdenes de magnitudes que se halla encerrado el misterio de la propación longitudinal que buscaba lord Kelvin. Pronto se verá que carece de importancia, por una razón análoga a la de que, el cálculo infinitesimal puede desarrollarse sobre una base «fluxional», de la misma manera que sobre una base «diferencial». Cuando una acción se repite, sea cualquiera la forma «material» que asume en el espacio continuo, se puede suponer que parte del foco emisor en una forma «fluxional continua» o a «golpes instantáneos», i. e., «pulsaciones diferenciales». De ambas maneras se llega a un mismo resultado.

Se ha explicado ya lo que significa la repetición y cómo excluye *la posibilidad de coincidencia.* Esta ley es axiomática y fundamental: es la base del presente estudio. Simbolizamos a *la repetición* por medio del *número.* Este concepto ha originado en nuestros cerebros, porque la naturaleza proveyó «la materia prima», de acuerdo con el principio de Locke. *Es la repetición en la naturaleza* que produjo el *número* «humano».

Decimos uno y nace un efecto, decimos dos y aparece otro. Pero

dos tiene que desalojar a uno pues no puede haber coincidencia y aquí aparece el fenómeno de *propagación.*

Resulta claramente que *una densificación* es *una propagación perceptible para nuestros sentidos.* Será *real absoluta* cuando es dinámica o perceptible conscientemente por nuestros órganos de tacto : percepción métrica ; y será *relativa* cuando es kinética o perceptible conscientemente por nuestros órganos visuales : percepción proyectiva. Se dice que es *real* cuando *la traza densificada de la acción en evolución tiene existencia finita* para nosotros y « relativa » en todos los demás casos. *Una piedra* como *traza densificada* es una *realidad absoluta* pero *el movimiento* de la piedra es una *realidad relativa.* Aquí se distingue el espíritu de lo anterior; manifiesto, por otra parte, intuitivamente.

Einstein ha postulado con un acierto colosal que la acción que dimensionaliza en un *continuum* mayor es la gravitación. Esta acción es de contacto y, por lo tanto, es « una propagación », *una repetición de una cosa.*

A fortiori se tiene que admitir que esta acción *penetra en el continuum desde un exterior* y que emana de un foco o, en lenguaje vulgar, de « una fábrica ». Si no se hace esto habrá que admitir « acciones espontáneas », etc., y siendo esto así, no habría razón en « los escrúpulos acerca de acción a distancia o de contacto ». Así, pues, la acción de gravitación *penetra* en un *continuum* mayor *desde el exterior* y *procede de una focalización.*

El *continuum* mayor existe diferenciado de otro superior por algún concepto. Este concepto es *uno de densificación.* Se puede concebir al *continuum mayor* como una traza densificada (más densa solamente) dentro de otra superior. Su cohesión, que es su densificación, es la característica de *la gravitación* que ha obrado; esta característica es « aquel concepto que distingue al *continuum* ».

Ahora, supóngase que *el foco* que origina la acción entra en actividad y que no hace más que *repetir una cosa de existencia tangible,* i. e., *que ocupa espacio* o lugar. Hace una, en seguida hace *dos,* etc. Dos desaloja a uno, tres obra sobre dos y éste sobre uno, cuatro sobre tres, tres sobre dos, dos sobre uno, etc.; así, uno avanza por *dura necesidad* venciendo una propiedad que es « la cohesión del *continuum* mayor », nada más. Avanza uno, impulsado por dos, y dos impulsado por tres, tres por cuatro, etc. El *processus* es uno de *realidad* y *de contacto* (o de golpe si se desea adoptar la hipótesis de la velocidad infinita en el infinito pequeño). Por acción de contacto, dentro de un or-

den de magnitud avanza *uno* hacia el *continuum* espacial. Al llegar a la superficie limítrofe de otro *continuum* se experimenta una resistencia que es « la característica cohesiva del mismo ». La acción entonces toma contacto con esta resistencia y empieza a *apilarse en su exterior,* puesto que la fábrica sigue *produciendo* o *repitiendo.*

A impulsos, « uno » se encuentra cada vez más presionado contra ese nuevo *continuum. El apilamiento crece infinitesimalmente* y aquí se tiene un fenómeno de *densificación* progresiva. Llega un momento en que *uno* penetra en el nuevo *continuum, pero no penetra el uno de la focalización, sino un uno deformado por el apilamiento de un lado y la característica del nuevo continuum del otro lado;* penetran « unos » compuestos y se inicia *la propagación* dentro del *continuum* menor, i. e., nuestro *continuum* mayor o universo.

Ahora postulamos que sólo penetran a nuestro *continuum* mayor *un cierto y determinado orden de uno* comprendiendo *un número infinito de fases dentro de este orden uno.* Así, pues, *uno* es un orden que distingue la propagación en nuestro *continuum* mayor. No hay para qué preocuparse de lo que sucede con los compuestos recíprocos, o *unos* que quedan fuera del *continuum,* y que constituye la parte *reflejada* de la acción *por apilamiento en el sentido de la propagación original;* puede sostenerse que si existe algún sér consciente *ad hoc,* en ese gran *continuum,* diría que *es el color de nuestro continuum mayor.*

En breves palabras, la acción de repetición que emana del foco generador llega a nuestro *continuum* mayor con *una velocidad* y *penetra con otra velocidad,* lo cual implica *alteración en la forma de propagación. Esto es lo fundamental.* Y esta alteración se manifiesta en una deformación por composiciones recíprocas. Pero es necesario observar que *la velocidad* a que se ha referido depende de *la acción de repetición,* esto es, lo que ya se dijo, *la repetición engendra, ipso facto, tiempo* y *espacio.* Nada podemos saber de esa velocidad en el gran *continuum* porque trasciende *nuestro orden de magnitudes, o de finito,* sólo sabemos que la acción penetra y se propaga dentro de nuestro *continuum* mayor con *otra velocidad; tampoco podemos apreciar a ésta,* puesto que *no vemos esa repetición* y es lo que hemos llamado *gravitación obscura.* Recién *nos damos cuenta de los fenómenos cuando una focalización en nuestro continuum mayor los revela,* como resultado de un apilamiento integral y *una nueva propagación compuesta eferente desde la focalización* que produce en nuestro *continuum* cerebral el fenómeno luminoso. *Esta es la propagación que podemos medir y expresar matemáticamente, como haremos con la letra c, invariante de Einstein.*

Fácil sería explicar cómo nuestro *continuum* mayor resiste la « presión de unos » que se apilan en su exterior, y no toma movimiento « con la corriente ». Con simplemente suponer al *continuum* mayor *focalizado* por entero entre una serie de focos luminosos en el gran *continuum* ya está. Las probabilidades son infinitas pues son fases.

Dígase, pues, que : *se focalizan en un punto* de nuestro *continuum* mayor *las repeticiones* de varios focos generadores del gran *continuum*. Se produce allí *un apilamiento* y *nace un astro*. La evolución de este astro está dividida en fases múltiples ; las principales invariantes son : 1ª Focalización ; 2ª Apilamiento infinitesimal progresivo ; 3ª *Repetición eferente* o gravitación luminosa creciente al *continuum* mayor con velocidad de propagación c; 4ª Máximum de apilamiento por compensaciones recíprocas entre aferencia y eferencia; 5ª Evolución descendente « estática » al compás de los focos progenitores.

Los fenómenos de temperatura son los que suceden dentro de la focalización, donde tienen lugar las composiciones tensoriales de « unos » de 1°, 2°, 3°, ..., n° orden. La materia resulta como efecto de estas composiciones. Pero la materia siempre es *repetición* y, por lo tanto, *propagación*. Quiere decirse sencillamente que la materia es un *límite recíproco* de la gravitación luminosa; es una propagación de lentitud tal que la percibimos conscientemente en forma dinámica, o sea por tacto. No percibimos visualmente, en forma consciente, a la materia por ser la propagación de un orden de magnitudes inferior al límite que corresponde a ese conducto cerebral. Distinguimos así entre percepciones proyectivas y percepciones métricas ; oportunamente se volverá sobre este punto trascendental.

Este fenómeno de focalización es uno de los más generales que se ofrece a la observación. Nuestro universo es un *continuum* de repetición, y los fenómenos se repiten en todos los órdenes de magnitudes, variando fásicamente, para nuestra conciencia, en virtud de la indeterminación que existe entre dos órdenes sucesivos de percepciones. Nuestra capital como ciudad, ofrece un espléndido ejemplo de una focalización. La aferencia se compone de todo lo que se propaga y converge hacia la misma, como foco. Sobreviene la composición, en todas las formas imaginables, en el foco, del material aferente, sigue la eferencia del producto compuesto como una exportación, esto es : la eferencia se establece en virtud de otra propagación divergente, etc., etc. El cerebro humano desempeña el mismo papel que la ciudad, como ya lo hemos señalado, y así sucesivamente hasta el *quan-*

tum atómico material. No se trata sino de una repetición *ad infinitum* del proceso : *aferencia, focalización, eferencia.*

Fácil es ver que la densificación no es más que la diferencia entre aferencia total y eferencia total, apreciada convenientemente. Esto es lo que entraña ese conocidísimo principio encerrado en la ecuación de continuidad. Pero el lector fácilmente podrá llevar adelante estas ideas por sí con simplemente aplicar su observación y razonamiento industrioso.

DIGRESIÓN 0.5655

La repetición

El momento en que se comprende *la invariación* universal del proceso de *repetición* desaparece la dificultad de *la continuidad* en el concepto matemático de dimensiones. Este concepto de continuidad que liga un punto con otro vecino ha sido siempre discutible y de difícil manejo analítico. La repetición suprime esto, por el simple hecho de ser « una propagación ». Se trata, pues, de la traza densificada infinitesimalmente de un « movimiento de propagación ». Pero esta propagación es más que aquel movimiento particular que asociamos con una Dalembertiana de ondas. Aquí se trata de una *emisión general o radiación* de puntos desde un foco, y esto queda bien definido en los términos del cálculo tensorial bajo la forma de

$$X = \sum_{i}^{n} \xi^i e_i \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

donde reconocemos el esquema invariante de *velocidad de propagación = frecuencia por longitud de onda ; propagación = frecuencia por punto ; propagación = frecuencia por cosa, objeto,* etc. ; *propagación = velocidad de repetición por cosa producida.* Todas estas expresiones equivalen a una sola que se resume en un concepto de *densidad* de algo.

El desplazamiento X *es una repetición de puntos* y expresamos su magnitud en términos de una serie determinada de *propagaciones básicas* o *repeticiones coordenadas* de una manera convencional. Este es el fundamento.

El cálculo tensorial queda, pues, en pie sobre esta nueva base sólida y natural. Sólo hay que interpretar adecuadamente los símbolos.

¿ Qué es un metro ? Una repetición de decímetros, una repetición de centímetros, de milímetros, de puntos. Esto es, una propagación de elementos básicos determinados convencionalmente. Poco importa el detalle de la cosa repetida; lo que vale es la ley invariante del proceso.

Tomemos el caso de movimiento : una velocidad de un metro por segundo es *una forma* si consideramos *los decímetros* que se mueven en ese segundo; *otra forma* si consideramos *los centímetros; otra* los *milímetros,* y *¿ si consideramos los puntos ?* Diremos que es *una velocidad infinita puntual.* Aparece, pues, *el concepto de orden de magnitudes de una manera sencillísima,* de conformidad con nuestras percepciones.

Pasando ahora al sentido físico de esta invariante nos apercibimos de que *toda acción* es una *repetición.* Se dirá que una potencia almacenada tiene aspecto de continuidad estática que escapa al principio de repetición. Pero esto es *sólo en apariencia* puesto que *nuestra conciencia sólo puede percibir por medio de la repetición y esto demuestra la invariación aludida.* Este estado aparente estático se logra, o mantiene, gracias a *una repetición temporal de instantes* y una velocidad de propagación infinitesimal, etc., y aquí *el parámetro que gobierna el fenómeno* comunica su carácter al mismo. *Es la repetición, la demostración de la existencia de una sola acción : gravitación.*

Si, pues,

$$c = \nu\lambda$$

es el esquema invariante de una repetición, o

$$c_x = \sum_i^n \nu^i \lambda_i \qquad i = 1, 2, ..., n$$

en la forma linealizada, comprendemos que de esta forma tiene *a fortiori* que salir *toda ley* que gobierna un fenómeno perceptible por la conciencia humana. *Esto es una evidencia.*

Precisamente es esta la tesis desarrollada en esta obra en una forma muy incompleta y superficial, pero el camino queda señalado o indicado y no hay más que avanzar.

Maravilla la sencillez de la definición del problema material. Un *continuum* material no es más que *una traza densificada,* siendo *una repetición o propagación compuesta en una focalización.* El proceso es *infinitesimal* y esto es lo que caracteriza al *continuum,* precisamente esta continuidad. La materia es « mecánica » o « eléctrica » con sim-

plemente cambiar « el punto de vista ». De una manera salen las hamiltonianas de Einstein y de la otra las de Mie.

La invariación de una repetición entraña una concomitancia o reciprocidad entre los dos elementos paramétricos que gobiernan el fenómeno. De aquí deducimos que toda propagación que incide contra un *continuum* material cualquiera distinto del *continuum* mayor de la emisión, produce una doble composición. Composición recíproca : una *aferente* que penetra y se propaga en el nuevo *continuum*, y otra *eferente* que se refleja y que visualmente constituye « el color ». Si se trata de « focalizaciones » de repeticiones se tiene el astro cuya evolución pende de una aferencia de gravitación obscura y una eferencia de gravitación luminosa que percibimos con nuestros órganos visuales.

Esta *aferencia* puede formar base para una hipótesis de « eclipses » *convergentes ;* al revés de los que conocemos por eferencia y que son divergentes. Quiere decir que se puede estudiar con fundamento científico una posible relación entre la formación de manchas sobre la foto-esfera del sol por proyección de *sombras* planetarias en posiciones de *anomalías* interesantes. Podría decirse que un eclipse aferente o « eclipse estacionario » determinado produce *una variación térmica* de elementos en la foto-esfera solar sobreviniendo una composición tensorial de aspecto

$$(c_x c_y) \rightarrow 0 = \text{obscuridad},$$

con bordes a composición *recíproca* luminosa

$$(c_x c_y) \rightarrow 1$$

que explicaría la especie « facular » del fenómeno. Del estudio de los períodos de máximos y mínimos de manchas solares relacionadas con las posiciones orbitales planetarias habría de aparecer la exactitud del fenómeno de « focalización » aferente de repeticiones, lo cual nos daría por otra parte un dato acerca del período evolutivo del sol. En otra digresión trataremos detenidamente ese punto.

Si todo esto deriva de una repetición y ésta se expresa matemáticamente por medio de una invariante sencillísima :

$$c = \nu\lambda$$

$$c_x = \sum_i^n \nu^i \lambda_i \qquad i = 1, 2, ..., n, \text{etc.},$$

habría de esperarse que este esquema contuviera toda ley natural.

El cálculo tensorial harmonizado de esta manera adquiere una importancia que trasciende todo límite concebible. No hay más que considerar un cuerpo de vectores en un punto P como un cuerpo de *velocidades de propagación* (anisotropía) para descubrir en la teoría de Lie Engel, en los teoremas de Levi Civita, y de curvaturas vectoriales espaciales. etc., significados físicos importantes. *Toda la física, ni más ni menos, queda reducida de golpe a este estudio tensorial.* Por esto. es que se dice, y con razón, que el cálculo tensorial sistematizado por H. Weyl, es el cálculo del futuro — el único cálculo necesario para la comprensión de la naturaleza — y por eso se ha compendiado en esta obra. La *repetición* reduce toda acción a una sola única invariante: *la gravitación por propagación.*

RESUMEN

Fué próximamente en el año 1740-1750 que el doctor David Hartley, médico y filósofo, fundó una escuela de psicología nueva a base de «vibración». Este eminente hombre de ciencia explicó el fenómeno de «sensación» consciente como resultado de *una propagación* de vibraciones. Habiéndose adelantado a su época le correspondió la suerte consiguiente : la suerte de Riemann. Recién hoy, se puede decir, estamos en condición de abrir el libro de Hartley y poner atención en su psicología.

Es preciso notar con especial cuidado que la teoría de Hartley fué puramente «intuitiva» y, por lo tanto, no pasó de hipotética. Fueron indispensables los conocimientos matemáticos que culminaron en Riemann y, hoy día, en A. Einstein para admitir el fundamento lógico y científico de esa teoría nueva.

Quizá el verdadero punto de emergencia de esta revolución científica que precisamos fué Gauss. La invariación de la curvatura gaussiana de superficies y su método paramétrico de representaciones analíticas fueron golpes colosales de talento humano. Riemann no hizo más que generalizar este principio aplicándolo a un espacio engendrado paramétricamente por «gaussianas», pero Riemann nos dio así el *continuum* como concepto de espacio puntual, y — no hay dos maneras de ver este descubrimiento — aseguró el triunfo de las matemáticas como medio de adquirir conocimientos de filosofía natural. Einstein nos ha hecho comprender a Riemann, y esto en 1915.

La repetición en la naturaleza nos demuestra que prevalece *la pro-*

pagación como «realidad absoluta» en la conciencia humana. Todo es propagación en virtud de repetición. No se ha visto antes porque se ha vivido engañado por fases del campo métrico. Al decir campo métrico, es forzoso notar que se entiende un orden de magnitudes especial y determinado y este es el *orden perceptible consciente humano.* Nosotros, crédulos solamente de aquello que podemos percibir conscientemente, hemos vivido hasta este momento «en la apariencia de las cosas». El sabio profesor H. Weyl describe esto magistralmente en su obra einsteiniana, y aventuró a sentar que su misma obra podía estar viciada por algún« engaño fásico». Se ha visto que esto resulta efectivo y de acuerdo con su prevención, pues toda su geometría infinitesimal descansaba sobre un principio fásico de igualdad y traslación que constituía «una verdad a medias». Ahora la hemos fundado sobre la repetición como invariante universal y se desprende inmediatamente como consecuencia que: nuestra experiencia entera fenomenal estriba en «*continuums* de diversas características fásicas», pero todos representantes de «trazas densificadas perceptibles» de una sola cosa: repeticiones o propagaciones. La invariación descansa sobre una reciprocidad o contravariación entre dos dimensionalidades y esto nos ha permitido inducir, basándonos sobre la teoría leibnitziana diferencial, que las posibles diferencias entre percepciones son simplemente *diferencias de propagación.* Se puede decir que esto es asombroso.

Aquí es que interviene Hartley. Queda pues demostrado matemáticamente que nuestras percepciones son el resultado de repeticiones de diversos órdenes que llegan a nuestro *continuum* cerebral por medio de mecanismos escalonados fásicamente, esto es, nuestros órganos de percepción sólo perciben una sola cosa y esa es la repetición, dividida en grupos de fases y escalonados desde gravitavitación luminosa hasta el límite recíproco de gravitación cohesiva material. Quiere decir, desde el órgano visual como límite métrico superior hasta el de «tacto» como límite inferior. Nada más.

Se desprende de esto que una piedra es un *continuum* material constituído por una *repetición determinada;* es, pues, *una propagación, cuya velocidad* C_p es infinitamente pequeña y, por lo tanto, *imperceptible* conscientemente, para nosotros seres humanos, *pero cuya «densidad* dimensional espacial — golpe sylvestriano — es infinitamente grande y al lado de esa velocidad, por lo tanto, es *finita para nosotros.* Quiere decir que son dos órdenes de magnitudes agrupados en una forma contravariante, i. e., invariante o concomitante. La

luz es precisamente el caso inverso de la piedra: *percibimos la propagación* pero no sentimos *la densidad sylvestriana* que es infinitamente pequeña, o de orden imperceptible conscientemente para nuestro tacto.

La situación, pues, es clara y *la pasmosa sencillez* de la *obra natural universal en evolución queda revelada nítidamente.*

Vivimos por repetición o propagación y toda nuestra fenomenología no es otra cosa que *la repetición* o, si se quiere, la propagación variada por una multiplicidad de infinitos fásicos.

La obra de densificación aparece así como una simple fase de propagación y comprendemos exactamente las razones que existen, ya explicadas, que permiten al sér humano conservar el compás de este majestuoso proceso; *nuestros sentidos gobiernan nuestra evolución* y, al decir esto, queremos señalar la importancia de percepción continua.

Nada de particular tiene ahora la afirmación, evidente, que en toda materia orgánica, sea cualquiera su naturaleza, una simetría lateral por inversión meridiana revela la harmonización de una acción *exterior a nuestro planeta;* y que toda simetría radial obedece a una acción de repetición en el *ambiente del planeta,* i. e., que guarda reposo en el planeta, etc. Estas cosas parecen axiomáticas ahora.

Cabe preguntar, ¿cómo es que se ha llegado a este concepto de la repetición como único fenómeno universal? Este ha sido el objeto especial del presente estudio y es, en realidad, el más importante.

Para explicarlo se empezó por hacer una advertencia sobre órdenes de magnitudes y se recalcó la importancia del resultado matemático que demostró existir *una determinación* en *un orden* de magnitudes como correspondencia a *una indeterminación* en *otro orden immediato superior.* Aquel que no domina la técnica matemática puede haber inferido el significado de esta correspondencia del ejemplo expuesto en esa misma advertencia, del barco que navega en el mar en condiciones planas, o del fenómeno de difracción luminosa en un monte, etc. Precisamente es en esto que reside la explicación y, comprendido a fondo esto, lo demás fluye con facilidad. El lector matemático ve inmediatamente todo esto en el simple enunciado de « linealización por reducción infinitesimal » en un *continuum* riemeniano o sea: la correspondencia de transformaciones *lineales* infinitesimales a transformaciones *generales arbitrarias.* Leibnitz nos dió este principio cuando nos enseñó que *toda curva no es otra cosa sino una repetición de elementos infinitesimales rectilíneos. Una repetición de una sola única cosa deter-*

minada, para *nosotros imperceptible conscientemente*. Aquí está todo.

Quiere decir esto que *un sér microscópico* hasta el grado de ser *infinitamente pequeño* podría marchar por cualquier curva, por tortuosa que se quiera concebir, sin darse cuenta sino de su «rectilineidad». Este sér creería firmemente que sólo existe la línea recta como trayectoria posible.

Nosotros no hemos observado que pueden *existir* dimensiones imperceptibles, conscientemente, para nuestros sentidos; no hemos palpado que una propagación puede ser *tan lenta* que nos parezca una *condición estática*. No sabíamos que una repetición estaba regida por una concomitancia y que esa condición de *infinita lentitud* correspondía con *una densificación integral finita* del orden *conscientemente perceptible de magnitudes*. Nada más que *esta omisión* es la responsable de nuestra ignorancia.

La repetición universal se expresa como sigue:

Velocidad de propagación = densidad de repeticiones en una unidad lineal de medida = *frecuencia* por *cosa producida*

$$c = \nu\lambda.$$

De hoy en adelante debemos dominar por completo la fenomenología perceptible de nuestro *continuum* mayor y *nuestro límite* o *jaula* será *el orden de magnitud que nos corresponde*.

Para terminar este breve resumen falta observar que «*continuums* materiales» son *propagaciones compuestas* en una focalización. Cuando se estudia óptica y se habla de la interferencia luminosa se pierde de vista que se está tratando de *pura cinemática*. En *una focalización astral* sobreviene *la composición tensorial* o *dinámica de las repeticiones apiladas*. Siendo *una* «la eferencia luminosa» que percibimos, comprendemos que *la materia*, por complicada que sea su estructura (grupo de elementos constitutivos de la molécula), obedece a formas matemáticas expresables por tensores del tipo (T_{ik}) y tensores del tipo (H_{ik}) *en todos los órdenes* posibles comprendidos entre el límite inferior *2, ó segundo orden* y otro superior determinado, pero desconocido; la química revelará esto.

Cuatro propagaciones arbitrarias, invertidas, pueden combinar para producir

$$(c_x{}^1 c_y{}^2) + (c_x{}^2 c_y{}^1) = 2T_{ik}$$

cuya velocidad de propagación puede tender a *cero*, i. e., materia.

Sino:

$$(c_x{}^1 c_y{}^2) - (c_x{}^2 c_y{}^1) = H_{ik}$$

que puede tener una componente planetaria de propagación *nula* y todo el movimiento *ser de rotación;* característica de *la materia magnética.*

Estas son dos formas fundamentales básicas de composición focal de propagaciones. Son las dos únicas formas en que se obtiene una variación de *densidad de propagación compuesta resultante,* relativamente a la característica **c** invariante del *continuum* mayor.

Aquel que ha penetrado el significado de esta tesis podrá *interpretar el cálculo tensorial harmonizado* en términos de la repetición, o sea, la propagación.

Cuando se enciende una modesta vela de cera, sólo se piensa que se está alterando una forma de repetición: cambiando una propagación.

CAPÍTULO VII

Geometría infinitesimal. Cálculo tensorial

¿Quién desconoce la teoría de curvatura de Gauss? Seguramente se trata del abecedario del cálculo infinitesimal. Recordemos algunos puntos de esta teoría. El método paramétrico es especialmente importante porque nos permite establecer correspondencias matemáticas entre superficies curvas y planas.

Una curva puede concebirse analíticamente representada por la intersección de dos cilindros:

$$x = \varphi\,(yz) \qquad z = (\psi\,(xy)$$

y puede considerarse engendrada por un punto *cuyo movimiento es guiado por una causa extraña al medio* y representado por un parámetro variable s. Esto es:

$$x = x\,(s), \qquad y = y\,(s), \qquad z = z\,(s),$$

podríamos escribir x_1 por x, x_2 por y, ..., y la curva sería entonces

$$x_i = x_i\,(s) \qquad i = (1, 2, 3, ..., n).$$

Cada valor de s produce un sistema de coordenadas, o una posición del punto y el conjunto es una trayectoria en el espacio. Naturalmente, s puede llenar otras condiciones, experimentar trasformación con-

tinua, etc., sin afectar la trayectoria en sí; por ejemplo, podría ser $s =$ tiempo, etc.

Así, pues, s distingue una fase física del punto que describe la trayectoria, mientras que la representación analítica, intersección de dos cilindros, tiene carácter absoluto.

Supongamos ahora una superficie curva

$$z = \varphi(xy),$$

sería la representación matemática analítica absoluta, siendo la paramétrica:

$$X = x(wv), \qquad Y = y(wv), \qquad Z = z(wv),$$

en que w y v son dos parámetros variables.

Aquí el movimiento de generación puede concebirse guiado por dos causas o agentes exteriores. Una curva w que recorre los puntos de otra curva v, o un punto P que es intersección constante de dos curvas, w y v, que se desplazan.

Supongamos ahora que hacemos la correspondencia:

$$w = W(s) \qquad v = V(s)$$

en un plano, en el cual concebimos un sistema coordenado (w y v), obtendremos, mediante la variación del parámetro temporal s, una curva plana de expresión analítica absoluta

$$w = \varphi(v),$$

y a cada punto de esta curva corresponderá un punto sobre la superficie, así obtendremos *una curva plana* como correspondiente a *una curva sobre la superficie.* Fácil es ver cómo se puede dividir el plano por medio de una reticulación cualquiera y obtener sobre la superficie una reticulación correspondiente; un área plana tendría una área superficial curva correspondiente, etc. Y en esta forma podríamos ingeniar una geometría de la superficie por medio de una correspondencia plana.

Por ejemplo, una correspondencia paramétrica entre esfera y plano se logra de una manera muy sencilla. Sea O el centro de la esfera de radio $r = 1$; elijamos un plano tangente en el punto Z y proyectemos centralmente, desde O, sobre este plano, los puntos de la esfera: M se proyectará en P. Si (u y v) son las coordenadas planas de P y si N es la proyección normal de M sobre el plano, se tiene inmediatamente:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\frac{OZ}{ZP}=\frac{MN}{ZN}; \qquad \frac{1}{u}=\frac{z}{x}; \qquad \frac{1}{v}=\frac{z}{y}; \qquad \frac{1}{1}=\frac{z}{z};$$

o

$$u=\frac{x}{z}; \qquad v=\frac{y}{z}; \qquad 1=\frac{z}{z};$$

y de aquí

$$u^2+v^2+1=\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}=\frac{1}{z^2}; \qquad z^2=\frac{1}{1+u^2+v^2}$$

$$z=\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}; \qquad y=\frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}}; \qquad x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$$

que nos da la correspondencia plana buscada. Observamos que sólo nos es posible representar media esfera sobre el plano, pues, el ecuador va al infinito. Dos puntos antipodales se superponen proyectivamente.

Si ahora formáramos la expresión de un elemento ds de curva sobre la esfera, hallaríamos la correspondencia siguiente sobre el plano, que es un pequeño ejercicio de cálculo :

$$ds^2=\frac{(1+u^2+v^2)(du^2+dv^2)-(udu+vdv)^2}{(1+u^2+v^2)^2};$$

esta expresión es de importancia, como hemos de ver más adelante. Si en vez de las letras u y v utilizáramos x_1, x_2, o subíndices, mediante una constante a, podríamos escribir con Riemann :

$$ds^2=\frac{(1+a\sum x_i^2)\sum dx_i^2-a(\sum x_i dx_i)^2}{(1+a\sum x_i^2)^2}.$$

La constante a define aquí la curvatura de un espacio esférico, y vemos que cuando $a=0$ tenemos el espacio plano euclideano

$$ds^2=\sum dx_i^2.$$

Pero nos hemos adelantado.

Volvamos a la representación paramétrica de una superficie

$$x=x(u, v), \qquad y=y(u, v), \qquad z=z(u, v).$$

supongamos ahora que tenemos sobre la superficie la conocida cuadrática :

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

la correspondencia paramétrica nos dará:

$$dx = \frac{dx}{du} du + \frac{dx}{dv} dv; \qquad dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv; \quad \text{etc.}$$

$$dx^2 = \frac{dx}{du} \cdot \frac{dx}{du} \cdot du \, . \, du + \frac{dx}{du} \cdot \frac{dx}{dv} \cdot dudv + \frac{dx}{dv} \cdot \frac{dx}{du} dvdu, \text{ etc.}$$

$$= \left(\frac{dx}{du}\right)^2 du^2 + 2 \frac{dx}{du} \cdot \frac{dx}{dv} dudv + \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 dv^2:$$

pongamos $(u_1 u_2)$ en vez de u, v, y además pongamos:

$$g_{ik} = \frac{dx}{du_i} \cdot \frac{dx}{du_k} + \frac{dy}{du_i} \cdot \frac{dy}{du_k} + \frac{dz}{du_i} \cdot \frac{dz}{du_k}$$

en que i y k varían de 1 a 2, resulta:

$$ds^2 = \sum_{ik=1}^{2} g_{ik} \, . \, du_i \, . \, du_k$$

en la que reconocemos *la célebre ecuación métrica, cuya importancia es trascendental.*

Se ve que, en general, los g_{ik} son funciones de u_i, $i = 1, 2$, y que estas componentes tienen aspecto de *producto escalar,* como hemos hallado antes al estudiar la forma métrica fundamental:

$$g_{ik} = (e_i e_k)$$

Ahora los coeficientes diferenciales substituyen los vectores básicos; de esto tendremos que hablar cuando estudiemos el cálculo tensorial infinitesimal.

Tenemos, pues, como correspondencia

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

sobre la superficie y

$$ds^2 = \sum_{ik}^{2} g_{ik} du_i du_k$$

sobre el plano. Únicamente en el caso de ser *la superficie un plano* será

$$ds^2 = du_1{}^2 + du_2{}^2$$

y en este caso vemos que los g_{ik} son constantes y derivan de ecuaciones lineales, i. e., la superficie es un plano.

Que podemos establecer esta correspondencia entre superficie y plano es muy fácil de demostrar. No hay más que considerar un pun-

to P de la superficie y un plano tangente en este mismo punto. Si consideramos un punto P′ vecino a P, cuyas coordenadas *relativas a* P son (dx, dy, dz) y las paramétricas correspondientes $(du_1\ du_2)$ en el plano, vemos que:

$$dx = \left(\frac{dx}{du_1}\right)_p du_1 + \left(\frac{dx}{du_2}\right)_p du_2; \qquad dy = \left(\frac{dy}{du_1}\right)_p du_1 + \left(\frac{dy}{du_2}\right)_p du_2;\ \text{etc.},$$

son tres ecuaciones lineales que expresan la correspondencia entre (dx, dy, dz) y (du_1, du_2), siendo nulas estas coordenadas en el punto P; en otras palabras, se trata de una simple correspondencia afín en un plano. Entendiendo que esta correspondencia afín plana en el plano sólo vale para el elemento infinitesimal de superficie en P, elemento común con el plano. Si con P como origen (du_1, du_2), $(\delta u_1, \delta u_2)$ respectivamente, son dos puntos infinitamente cercanos a P sobre el plano tangente, corresponderán dos desplazamientos ds y δs sobre la superficie y si θ *es el ángulo* comprendido tendremos manifiestamente:

$$\cos\theta = \frac{(ds\,.\,\delta s)}{\sqrt{(ds)\,(\delta s)}} = \frac{Q\,(d\,.\,\delta)}{\sqrt{Q\,(dd)\,Q\,(\delta\delta)}},$$

en la que

$$(ds\,.\,\delta s) = \sum_{ik}^{2} g_{ik} du_i \delta u_k.$$

La correspondencia de área sigue, pues; área paralelogramo construída sobre ds y δs es igual a:

$$\sqrt{g}\,.\begin{vmatrix} du_1 \delta u_1 \\ du_2 \delta u_2 \end{vmatrix} \qquad g = |g_{ik}|$$

esto es, $|g_{ik}|$ es la determinante de los coeficientes de la forma fundamental. Resulta así que

$$\int \sqrt{g}\,.\,du_1 du_2$$

nos da un área determinada sobre la superficie. La *invariación* relativamente a las curvas paramétricas, de estos resultados, es muy conocida, y el significado de los cambios, *relativamente a la afinidad en el plano,* está a la vista. Repetimos que todo estriba en tomar en el plano, como expresión de la distancia entre dos puntos, la ecuación

$$ds^2 = \sum_{ik}^{2} g_{ik} du_i du_k$$

en vez de la canónica

$$ds^2 = du_1^2 + du_2^2.$$

Nos olvidamos de hacer notar la simetría manifiesta de los g_{ik}, esto es:

$$g_{ik} = g_{ki}.$$

La importancia de la expresión ds de la distancia entre dos puntos sobre la superficie no puede escapar a la atención del lector. Esta función define toda la geometría de la superficie y sabemos que los coeficientes simétricos g_{ik} pueden servir para comparar las geometrías entre superficies curvas: *dos superficies cuyos g_{ik} son iguales o comunes tienen idéntica geometría,* etc. Recuérdese la representación conformal de la analítica.

Gauss fué el primero en observar que la geometría de una superficie nada tenía que ver con el espacio que la rodea, i. e., *medidas interiores se llevan a cabo sobre la superficie misma.* También notó *la invariación* de magnitudes lineales *geodésicas relativamente a deformaciones continuas de la superficie,* lo cual impedía descubrir la curvatura de la superficie. Esto es, si dibujamos figuras sobre un papel y luego encorvamos al papel arbitrariamente sin alterar su estructura (romper, etc.) será imposible *por medidas de las figuras dibujadas descubrir la curvatura del papel,* que no varía; ya lo sabemos del cálculo. Si tomamos un punto sobre una esfera y con éste como centro trazamos un círculo, una mensura del círculo y del diámetro curvilíneo nos revelará inmediatamente la curvatura. Siendo diferente la relación de circunferencia a diámetro sobre una esfera y sobre un plano, etc.

También sabemos del cálculo que en coordenadas curvilíneas generales la distancia entre dos puntos infinitamente próximos en el espacio, que en un sistema normal cartesiano tiene la forma canónica cuadrática, es:

$$ds^2 = \sum_{ik=1}^{3} g_{ik} dx_i dx_k$$

usando, por ejemplo, un sistema de tres superficies definidas por:

$$\begin{array}{llll} x_1 = \varphi(x, y, z) & dx_1 = \text{etc.} & \text{y} & dx = \text{etc.} \\ x_2 = \psi(x, y, z) & dx_2 = \text{etc.} & \text{y} & dy = \text{etc.} \\ x_3 = \chi(x, y, z) & dx_3 = \text{etc.} & \text{y} & dz = \text{etc.} \end{array}$$

resulta la expresión anterior en que

$$g_{ik} = \frac{dx}{dx_i} \cdot \frac{dx}{dx_k} + \frac{dy}{dx_i} \cdot \frac{dy}{dx_k} + \frac{dz}{dx_i} \cdot \frac{dz}{dx_k},$$

que sale de la solución recíproca $x = f_1 (x_1 x_2 x_3)$, etc. Las coordenadas paramétricas (x_i) son absolutamente arbitrarias. La correspondencia geométrica será euclideana, como ya lo hemos señalado, cuando los g_{ik} son constantes.

Todos recordamos cómo Gauss, valiéndose de una esfera unitaria, mide la curvatura de una superficie y como la relación de área en que se basa no es otra cosa que la expresión analítica de *una divergencia de la condición plana*, produciendo la condición plana una característica cero en la esfera de radio unitario.

Riemann continuó la obra de Gauss y remontó de las superficies al espacio.

En una palabra, Riemann *comprendió que así como una superficie de dos dimensiones en un espacio tridimensional* puede ser engendrada paramétricamente por *curvas unidimensionales,* también *un espacio tridimensional sumergido en otro de cuatro dimensiones puede ser engendrado paramétricamente por superficies bidimensionales y así* ser un espacio curvo! Engendrado el espacio por medio de *superficies paramétricas curvas* nos apercibimos que siendo cada punto del espacio el centro de un haz de superficies curvas — centro de intersección, — tendremos que tener en *cuenta la curvatura según la dirección del elemento de superficie correspondiente* y nos vamos dando cuenta, como Riemann, que esta clase de magnitud tiene mucha semejanza con *las tensiones en un cuerpo elástico.* Esto es, *se trata de magnitudes que se expresan por medio de tensores.* En pocas palabras, Riemann descubrió que *la curvatura espacial es un tensor,* mientras que la curvatura de *una superficie es una magnitud escalar* (tensorial de orden cero). Pero el carácter *exactamente tensorial* de esta *curvatura se comprende cuando se observa que la curvatura gaussiana de una superficie es invariante relativamente a deformaciones continuas de la superficie, lo cual independiza la medida de la curvatura espacial de la selección paramétrica de superficies determinadas.* Esto es, *la curvatura espacial es un tensor* y como tal independiente, o invariante, relativamente a transformaciones continuas de coordenadas que dejan inalterada la estructura puntual del espacio, o sea que no alteran su densidad puntual. Esta condición es de gran importancia, como se verá oportunamente. Una geodésica queda determinada por su dirección.

Nos hemos adelantado un poco. Volvamos a la geometría euclideana y busquemos el punto de contacto que tiene con la geometría riemeniana.

Riemann ha partido del concepto rectilíneo infinitesimal de una

curva. Esto es, toda curva puede conceptuarse engendrada por elementos infinitesimales *rectilíneos.* Pasemos al caso de una superficie curva considerando a toda superficie compuesta de elementos infinitesimales *planos* y, por fin, a los espacios curvos compuestos de *elementos espaciales infinitesimales euclideanos o planos.* Estamos, pues, palpando el origen de la geometría infinitesimal y nos apercibimos que el paso de la geometría euclideana finita a la infinitesimal es idéntico al que dió Maxwell cuando substituyó la *acción a distancia finita* por la *acción de contacto* o *a distancia infinitamente pequeña.*

Quiere decir, pues, que Riemann aplica la geometría euclideana al infinitamente pequeño. Como la geometría euclideana está caracterizada por la forma cuadrática pitagórica, expresión de la distancia entre dos puntos, esta misma forma pasa a la geometría de Riemann para el caso de dos puntos infinitamente próximos uno de otro. Esto es, se repite la geométría euclideana en otro orden de magnitudes.

Riemann, en consecuencia, admitió un espacio que es euclideano en sus partes infinitesimales y que es posible comparar magnitudes infinitesimales independientemente de *posición y dirección.*

Esta posibilidad de comparar magnitudes independientemente de dirección y posición es una característica exclusiva del espacio riemeniano y *no es admisible en el caso general de espacios curvos, como ha indicado H. Weyl,* quien ha desarrollado la geometría infinitesimal sobre la base de que no es posible desplazar una distancia elemental sino de un punto al infinitamente próximo, o vecino. Nosotros hemos suprimido la discontinuidad infinitesimal totalmente, por medio de *la propagación,* o repetición como origen de dimensiones. Esto aparecerá más adelante, por el momento seguiremos el método clásico.

La idea de Riemann aparece claramente ahora.

Habría que remontar hasta Leibnitz para hallar el verdadero « punto de emergencia » del método infinitesimal, puesto que este sabio alemán fué quien nos indicó la manera de concebir curvas compuestas de elementos infinitesimales rectilíneos. Si el lector recuerda lo que hemos dicho al tratar los principios de la geometría afín habrá observado que *la traslación rectilínea* constituyó la base de aquélla. Kinemáticamente este movimiento traslatorio rectilíneo es la característica de un *espacio libre newtoniano,* y, al mismo tiempo, distingue el *movimiento uniforme.* Un espacio euclideano es, pues, un espacio afín plano y, por lo tanto, newtoniano libre — no hay acción de fuerza — y es el espacio de las traslaciones congruentes rectilíneas. Combinando todo esto se ve que una curva considerada kinemáticamente

como una trayectoria, es engendrada por *traslaciones rectilíneas infinitesimales,* lo cual indica que el punto material que la describe lo hace en forma *infinitesimalmente libre,* esto es, el punto material se mueve en una forma que es a *cada instante libre.* Su movimiento infinitesimal cambia bajo efecto de transformaciones continuas lineales y es así *uniforme* por trechos infinitesimales.

Recordando que la trayectoria rectilínea es una geodésica, o *una trayectoria estacionaria* en lenguaje de Hamilton, podemos decir que *un punto material describe su trayectoria geodésicamente,* y es así que la tierra describe su órbita al rededor del sol. La importancia de esta definición del movimiento de un punto aparecerá en breve.

Cuando decimos, pues, que el espacio Riemann *es infinitesimalmente euclideano* queremos dar a entender que ese espacio *es al mismo tiempo newtoniano infinitesimalmente,* y aquí tocamos el punto que sirvió a Levi Civita de apoyo para formular su admirable concepto de *traslación paralela infinitesimal.* Con esta propiedad Levi-Civita dotó al espacio curvo general de *conexión afín,* esto es, *convirtió al espacio amorfo en espacio esférico constante en sus elementos infinitesimales,* admitiendo la posibilidad de *la traslación paralela congruente infinitesimal* de vectores infinitamente pequeños.

Por otra parte, hemos observado cómo *una traslación rectilínea infinitesimal* plantea la importancia de la expresión matemática *de la distancia rectilínea entre dos puntos* y que el espacio métrico pitagórico se distingue por la conocida forma cuadrática, que en un espacio tridimensional y sistema normal cartesiano de representación es :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

y que en coordenadas generales es :

$$\sum_{ik=1}^{3} g_{ik} dx_i dx_k, \text{ etc.}$$

Una vez formulada esta expresión de distancia entre dos puntos : *traslación infinitesimal, en valor absoluto,* podemos dar *al espacio afín su complemento métrico,* i. e., el espacio métrico.

El lector puede, por lo dicho, comprender la importancia fundamental, por no decir *trascendental,* del concepto infinitesimal de Leibnitz. Todo descansa sobre el principio de la *generación de una curva por medio de un elemento rectilíneo infinitesimal. ¡ Una traslación infinitesimal rectilínea !* Todo se reduce *a este único principio :* que posee *un significado geométrico, uno kinemático y uno dinámico;* vemos re-

ducido al mismo el magistral concepto de los espacios amorfos multidimensionales de Riemann. *¡Qué admirable sencillez!* Esto fué lo que comprendió Einstein.

Leibnitz criticaba a Newton su aceptación del principio de acción a distancia. Sin duda procedía impulsado por rivalidad más bien que justicia, pues Newton mismo imponía la salvedad a sus leyes diciendo que los fenómenos *aparentaban* una acción a distancia. En cambio dejó de ver el alcance de aquella observación newtoniana, evidencia de un talento colosal viz: *La trayectoria rectilínea es fenómeno característico de cuerpo libre, y de movimiento uniforme.*

En vista de esto puede decirse que la diferencia entre la geometría euclideana plana y la geometría riemeniana infinitesimal, es análoga a la que existe entre los conceptos físicos de acción a distancia y acción por contacto. Un concepto es integral y el otro es infinitesimal. Hay que añadir que la integral es un caso muy particular de integración, en el caso euclideano, pues es una operación que produce como resultado una línea recta. Esto nos obliga a considerar « las fases » de un fenómeno. Podríamos definir éstas como *efectos de acciones extrañas,* que alteran un estado cualquiera físico. Una ley integral debe prevenir todas las posibilidades fásicas y, por lo tanto, contener un parámetro representante de cada una de estas acciones extrañas: las conocidas constantes de integración. He aquí una dificultad « humana ». Nuestra percepción *consciente* es, desgraciadamente, *integral.* Tenemos conocimiento de los fenómenos en forma global, desfigurados relativamente a sus principios, por acciones extrañas que podemos apartar sólo con grandísima dificultad y a fuerza de observación continua, por un método de análisis harmónico.

Un punto material se mueve en forma *libre infinitesimal.* Este movimiento experimenta un cambio fásico por efecto de una acción extraña, esto es, no cambia de naturaleza puesto que *la ley es invariante* pero si cambia de clase. Se produce una simple *alteración métrica,* nada más, i. e., cambia de dirección y cambia la velocidad de magnitud. Siempre es infinitesimalmente libre. La trayectoria registra *la historia del fenómeno fásico.* Si se piensa a fondo sobre este principio se verá que, en pocas palabras, el sentido matemático físico de lo que llamamos « evolución » es *un estado de equilibrio en un campo a cuatro dimensiones, una de las cuales varía continuamente en una sola dirección.* Si no fuera por la dimensión *temporal* el estado sería estático y no existente para nosotros. La existencia es base de toda fenomenología y vemos que su esencia es «propagación».

Caemos naturalmente a considerar de cerca esta dimensión temporal, que varía constantemente a son de « corriente » y en una sola dirección viz : *de futuro a pasado.* Desde un principio comprendemos que es *la esencia de todo cambio fásico.* Cuando hablamos de la distancia finita entre dos puntos en un espacio a tres dimensiones, por ejemplo, en un sistema normal cartesiano

$$s^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

formamos un concepto definido, mentalmente, del significado que tiene y perdemos de vista que la dimensión temporal, imprescindible, no figura porque es imperceptible conscientemente, o de diferente orden de magnitud; pero cuando en un sistema, también normal, expresamos la distancia entre *dos puntos* por la canónica

$$s^2 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

y añadimos que x_0 *varía constantemente,* ya no podemos formar esa imagen mental definida. Si suprimimos una dimensión espacial obtenemos analíticamente la figura de un hiperboloide como sección tridimensional, o si pudiéramos reducir el tiempo a la constancia *suponiendo que varía con infinita lentitud,* estaríamos en el caso primero de tres dimensiones. Esta dimensión temporal es variable, unidireccionalmente, continuamente, y es así que interviene matemáticamente en las leyes naturales. Pronto veremos el significado de esta expresión cuadrática fundamental.

Como observa Einstein nuestro mundo es cuatridimensional. Tres dimensiones son espaciales y una es temporal. La dimensión temporal se nos presenta completamente distinta a las demás, como si se tratara de una magnitud absolutamente heterogénea. Sin embargo, el simple fenómeno *movimiento,* liga a todas estas dimensiones entre sí, como si se tratase de una mezcla, o, mejor aún, *una solución.* En resumidas cuentas, repetimos lo dicho, que *existimos,* y esto contiene un concepto de corriente en una dirección imaginaria.

CURVATURA

Gauss ideó el método de medir la curvatura de líneas por medio de lo que llamaremos : una divergencia normal. Lo que mide es el apartamiento de *la condición recta* en un caso y *el apartamiento de la condición plana* en el caso de superficies curvas. La parte verdadera-

mente admirable del método es su invariación relativamente a transformaciones continuas de coordenadas o, lo que es lo mismo, deformaciones continuas de la superficie considerada.

Curvatura gaussiana. — Gauss mide la curvatura de líneas y superficies valiéndose de una circunferencia de círculo y una esfera, de radios iguales a 1. Si por un punto, centro de un círculo unitario, trazamos radios paralelos a las normales en los puntos de un arco s de curva cualquiera plana, obtendremos sobre la circunferencia del círculo una longitud de arco — el determinado por radios extremos paralelos a normales extremas de s, — que mide exactamente el cambio total de dirección de un punto que recorre a s, sobre la curva. Dividiendo este arco de circunferencia por la longitud s de curva obtenemos una expresión de *curvatura media* — podríamos llamarla una curvatura estadística, — haciendo tender s a ds infinitamente pequeño, y a cero, obtendremos de la relación anterior, en el límite, la expresión de la curvatura propiamente dicha, en el punto P de la curva: curvatura específica. Empleandose una esfera unitaria en el caso de una curva gaussa, etc.

Estos mismos conceptos se aplican a una superficie, y si llamamos $d\omega$ el ángulo sólido esférico determinado por el cono de radios normales — paralelos a las normales en los puntos de una línea que encierra un área $d\sigma$ sobre la superficie, — y si ρ, ρ', son los radios principales de curvatura en el punto P considerado, tenemos:

$$\text{límite de } \frac{d\omega}{d\sigma} = \frac{1}{\rho\rho'}$$

igual *curvatura específica en* P.

Pero como una área sobre una esfera unitaria se mide por medio de lo que se llama «el exceso esférico», podemos definir la curvatura media de una porción s de superficie como sigue:

$$\text{Curvatura media o estadística} = \frac{2\pi - \text{cambio total de dirección}}{\text{área } s},$$

pero 2π, cambio total de dirección, es lo que Gauss llama «curvatura íntegra»:

$$\text{Curvatura estadística} = \frac{\text{curvatura íntegra}}{\text{área } s}.$$

Es muy sencilla la demostración de la equivalencia exacta entre estas dos formas de expresión. No hay más que hacer «rodar» un plano tangente sobre la traza de la curva en s y otro sobre la traza

correspondiente esférica y notar que a cada instante la dirección del movimiento sobre la esfera es *normal al eje instantáneo de rotación correspondiente* en la superficie. En otras palabras, la traza esférica registra las alteraciones de dicho eje instantáneo de rotación y como éste es a cada instante normal al plano que determinan dos normales consecutivas — que determinan la sección geodésica ds, — resulta *a fortiori* que la traza esférica mide el cambio de dirección en la superficie según s. Aplicando ahora el principio de exceso esférico resulta que:

$$\frac{2\pi - \text{cambio total traza esférica}}{\text{área } s} = \frac{\text{curvatura íntegra}}{\text{área } s}.$$

El teorema de Euler nos da las expresiones de curvaturas $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\rho'}$, en dos secciones normales en un punto P de una superficie y hemos visto que éstos dependen del valor que toman en ese punto las *segundas derivadas* de la ecuación

$$z = \varphi(xy),$$

esto es:

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_p, \qquad \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)_p, \qquad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)_p.$$

Si llamamos

$$A = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_p, \qquad B = \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)_p, \qquad C = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)_p,$$

entonces para dos secciones normales tenemos la relación conocidísima:

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = A + C,$$

y si R y R′ *son los radios principales de curvatura* en P tenemos:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R'} = AC - B^2.$$

Así, pues, resulta:

$$\frac{\text{Curvatura íntegra}}{\text{área } s} = \frac{1}{RR'}$$

si suponemos constante a $AC - B^2$. Si *no es constante* entonces $\frac{1}{RR'}$ mide la *curvatura específica en* P. Esto es

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{RR'}$$

en P.

Muy fácil es ahora ver que si una superficie se deforma continuamente sin alterar su *densidad* — sin estirarse ni contraerse, — las longitudes de geodésicas sobre la misma, los ángulos entre dos geodésicas, etc., no se alterarán y, por lo tanto, tampoco se alterará $\frac{1}{RR'}$ ni $\frac{1}{\rho\rho'}$ en un punto P. Aquí tenemos, pues, la célebre propiedad de invariación de curvatura gaussiana revelada, y esta es la propiedad de que se valió Riemann para formular su magistral concepto de « curvatura espacial », reconociendo su *carácter tensorial*. Riemann basó sobre esta invariación su *continuum* puntual multidimensional, o de n dimensiones y aplicó *el concepto gaussiano* generalizado en un punto P del mismo, considerando al espacio engendrado paramétricamente; y así en un punto tenemos una curvatura según cada dirección de elemento superficial paramétrico, esto es, elemento perpendicular *a la dirección normal de la superficie considerada. La invariación de la curvatura* es la *propiedad colosal que caracteriza al continuum espacial,* o, como nos mostró Einstein, podemos deformar continuamente al *continuum* mediante transformaciones continuas arbitrarias de coordenadas sin que se altere «la curvatura riemeniana» en P, siempre que no alteremos la densidad puntual del *continuum,* o sea, su estructura. Esto es lo mismo que decir que las geodésicas que parten de un punto quedan determinadas una vez que conocemos sus direcciones.

El lector, por simple inspección, verá que la curvatura gaussiana es una invariante diferencial derivada de la forma métrica fundamental:

$$ds^2 = \sum_{ik}^{2} g_{ik}\, dx_i dx_k \qquad g_{ik} = g_{ki},$$

esto es, formada con las derivadas de los coeficientes g_{ik}.

Riemann generalizó el concepto para $i, k = 1, 2, \ldots, n$ dimensiones. Si el espacio es homogéneo en todos sus puntos, es natural que su curvatura será constante. Si aplicamos esto a un espacio de n dimensiones y recordamos la forma fundamental métrica hallada para una representación paramétrica de la esfera, podemos decir que en un espacio esférico, n dimensional, la distancia entre dos puntos vecinos tiene el aspecto:

$$ds^2 = \frac{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)\sum_i^n dx_i^2 - a\left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)^2},$$

en que a es *la constante de curvatura* y es nula para un espacio plano euclideano. En un espacio esférico podemos desplazar una figura conservando la congruencia, como es evidente; podemos, pues, hacer comparaciones de distancias lineales independientemente de posición y dirección. El espacio euclideano plano afín se distingue por el grupo de trasformaciones lineales ya mencionado varias veces y que hace posible la geometría afín, etc., y es el límite de los espacios esféricos para $a = 0$.

Llegamos ahora al punto culminante de la especulación riemeniana: las multiplicidades discretas en oposición a las continuas.

Matemáticamente, Riemann halló posible un espacio *continuum* a n dimensiones. En este espacio un punto tiene n coordenadas numéricas arbitrarias y la continuidad se establece imponiendo la condición de que puntos infinitamente cercanos tengan coordenadas que se diferencian en cantidades infinitamente pequeñas del mismo orden que su separación. Riemann denominó multiplicidad discreta a ese *continuum* en que n tiene *un valor determinado*. Al ser determinado n se ve que la forma métrica fundamental queda también determinada. La métrica de este *continuum* o multiplicidad discreta queda determinada por el hecho mismo de serlo el número dimensional.

En realidad la condición «discreta» implica que la continuidad en el *continuum* está limitada a un determinado orden de magnitud. Si analizamos esto, veremos que existe la misma diferencia entre *discreta* y *continua* como entre los procesos conscientes de *contar* y *medir,* y caemos en el terreno de percepciones visuales y de tacto.

¿ Qué, pues, *es lo que determina la dimensionalidad de una multiplicidad continua ?*

Las palabras de Riemann son admirables: *reconocemos haber llegado al borde de otra ciencia, la física, el cual no pensamos cruzar !*

Reconocemos que en un *continuum n dimensional* es preciso que *una acción extraña produzca una densificación que permita diferenciar una dimensionalidad puntual del resto del continuum.* Quedamos asombrados ante la profundidad de esta observación, triunfo de una especulación puramente matemática.

Einstein, único desde el tiempo de W. K. Clifford en 1875, qué comprendió a Riemann, nos ha dicho que la acción extraña que causa la dimensionalización en el *continuum* es *la gravitación.*

Toda la filosofía del día tiende a adelantar el conocimiento sobre este maravilloso *continuum n dimensional riemeniano.* El *contenido desconocido* de este espacio puntual ha sido declarado, por el astróno-

mo inglés Eddington, ser *de la misma naturaleza que nuestra conciencia!* Podríamos decir que nuestra conciencia es un *continuum* a *n* dimensiones y que una acción exterior produce la dimensionalización por medio de nuestros órganos de percepción. Por ejemplo, la vista de *un libro* sería una tal acción, *real* exterior, que produce una correspondiente dimensionalización en nuestra conciencia. *Una densificación* en el *continuum.* La palabra « libro » produce una densificación fonética, y otra literal, etc., obedeciendo estas densificaciones a leyes determinadas, todas con un solo efecto *invariante* de *producir una diferenciación consciente.*

Exactamente en esta forma es que debemos interpretar las acciones exteriores a que se refiere Riemann.

Einstein nos ha enseñado que todas estas *densificaciones* son simples *alteraciones del campo métrico.* Son variaciones de la forma métrica fundamental

$$\sum_{ik}^{n} g_{ik} dx_i dx_k \qquad g_{ik} = g_{ki},$$

por efecto de variaciones de las componentes g_{ik} de este tensor métrico. En otras palabras, toda nuestra experiencia fenomenal obedece a simples variaciones del campo métrico mundial! Según este admirable hombre de talento, *la conexión afín* de nuestro espacio cuatridimensional es *el campo de gravitación,* y las leyes que rigen a este campo y a la materia, o densificaciones que existen en el mismo, están contenidas en los g_{ik} de la métrica fundamental.

¡ Qué inmenso triunfo matemático !

¡ La distancia cuatridimensional entre dos puntos gobierna nuestro universo !

Esta distancia expresada es un sistema normal geodésico coordenado, tiene la forma canónica cuadrática. Supongamos, para cambiar de órdenes de magnitudes, que nuestro espacio mayor es euclideano plano y que nuestro sistema es normal cartesiano, la distancia, entonces, aparecerá como una divergencia de la condición luminosa. Esto es lo que hemos señalado : medimos la variación relativa a la propagación invariante, y vimos que esta variación es sólo posible por dos conceptos : cambios de *continuum* o focalizaciones. En otras palabras, por variaciones de densidad. Tenemos, pues, las dos ecuaciones que revelan todo esto :

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0,$$

en que la divergencia de la condición luminosa es precisamente lo que llamamos s^2, distancia. De acuerdo con nuestra tesis : *es la divergencia de la condición invariante la que percibimos fenomenalmente;* como si dijéramos que es la desigualdad que, obrando sobre nuestro *continuum* cerebral, produce el efecto que llamamos « fenómeno ». Repitiendo esto en otro orden de magnitudes diremos : *es la desigualdad perceptible en la naturaleza* la causa del fenómeno « idioma » o « lenguaje », y *esta es la medida en unidades fonéticas convencionales de las divergencias de condición de igualdad o invariación.*

A pesar de manifestar su intención de no cruzar el borde, Riemann aventuró la observación de que la dimensionalidad de un *continuum* es determinada por *la materia que contiene.* Quiere decir que lamate ria determina al campo métrico. Cambiando el contenido material cambiará la forma métrica fundamental.

Dejamos esto para entrar de lleno al cálculo tensorial en el *continuum,* o sea la geometría infinitesimal de H. Weyl.

DIGRESIÓN 0.57

Velocidad infinita. Hamiltoniana luminosa

Ya hemos hecho alusión a esto y mencionamos una hipótesis de Kelvin relacionada con la propagación del *fenómeno cerebral humano* llamado *luz.* En otra digresión se explicará este fenómeno de « la luz » en una forma nueva y de perfecto acuerdo con la naturaleza.

Se dijo que *toda* velocidad finita para nosotros puede convertirse en *una velocidad infinitamente* grande por pasaje al *infinitamente pequeño.* Esto es evidente y encierra una « indeterminación » que afecta a *un orden,* i. e., dentro del orden la faz queda indeterminada y lo único determinado es « el orden ». *Cualquier cosa finita,* para *un sér infinitamente pequeño,* tiene, *a fortiori,* que poseer *dimensión infinitamente grande.* Está a la vista : simple relativismo entre dos órdenes.

Se supone que la velocidad en el finito es grande y finita. Una propagación puede, en virtud de esto considerarse de dos maneras que en todo guardan relación con las dos maneras de infinitesimalización clásicas :

$$\frac{\text{fluxión}}{\text{Newton}} \qquad \frac{\text{diferencial}}{\text{Leibnitz}}$$

Podemos concebir una repetición como un proceso gradual continuo y podemos considerarla a base de « golpe estático instantáneo». De la primera manera el producto sale de la focalización en una forma de *perceptible continuidad,* y de la otra sale por « golpes rapidísimos », seguidos de pausas temporales.

El número *dos aparece* y desplaza por *un golpe instantáneo* al número *uno* haciendo que éste *en la misma forma tome su nueva posición.* Si no así, entonces el dos aparece empujando a uno hacia su nueva posición sin que se haya perdido jamás el contacto. Es un *tren de unos* que van saliendo.

Matemáticamente este *processus* puede expresarse fácilmente si suponemos que haya regularidad en el mismo. Si hay irregularidad finita, entonces, « linealizamos » y pasando al infinitamente pequeño hallaremos la regularidad. Pero como el procedimiento es *ipso facto* infinitesimal, tiene que ser regular para nosotros, a la fuerza, sin necesidad de recurrir a la experiencia fásica como árbitro. Nuestro *continuum* mayor sólo tiene *una forma de propagación invariante,* en cuanto se relaciona con la conciencia humana, viz :

c de Einstein.

Esta velocidad es para la humanidad un límite superior, verdaderamente el deslinde del orden de magnitud que nos enjaula.

Supongamos ahora la ecuación siguiente referida a una unidad temporal y otra métrica determinadas :

$$c = \nu\lambda.$$

Propagación = frecuencia por longitud de onda, esta ecuación es invariante y en su maravillosa sencillez encierra todo el fenómeno de la *repetición.* De esta simple expresión tiene, *a fortiori,* que salir *cuanto infinito fásico existe.*

Siempre deberá recordarse que se trata de una velocidad y para mayor sencillez que se trata de *una unidad de tiempo.* En esta forma, c mide un desplazamiento espacial, ν *un número de repeticiones* y λ otro desplazamiento. Teniendo en cuenta el principio dimensional de Sylvester se ve que, *a fortiori,* hay *normalidad* entre ν y λ.

Decimos, pues, que c representa el proceso que tiene lugar en un foco emisor, o focalización, en una unidad de tiempo, un segundo planetario. El foco durante un segundo de tiempo hace ν *repeticiones de una cosa infinitesimal;* esta cosa, *no pudiendo coincidir, tiene a la fuerza*

que salir y avanzar en el continuum mayor y *sale rectilíneamente, por razones obvias.* La manera que salé ofrece las siguientes analogías.

Un carpintero clava un clavo en una tabla, golpea ν veces por segundo sobre la cabeza del mismo y el clavo, bajo el impulso de cada golpe, avanza una distancia λ.

Invirtamos el proceso de *una araña* que se deja caer deshilvanando su tela desde una altura — su caída es con una velocidad de $\nu\lambda$ y en forma fluxional continua. Aquí tenemos dos puntos de vista, — únicos dos posibles.

Se ve inmediatamente que en el primer caso λ *mide vectorialmente una fuerza* por *medio de un desplazamiento normal dimensional.*

Si, pues, f es una potencia, entonces $\frac{df}{dx_i}$, en la que (x_i) son las coordenadas del foco, mide perfectamente esa fuerza que encierra la λ. ¿Pero cuál es *la causa de la fuerza?* Indudablemente es *la cohesión* de la tabla o madera. El índice de cohesión que podemos encerrar en una *escalar* μ y suponer lo que se quiera acerca de su variación, o no variación, a medida que el número «uno» o punta del clavo avanza. Así, pues, $\mu f_i = \mu \frac{df}{dx_i}$ será la *densidad de la fuerza en evolución.* Nada podría ser más exactamente descriptivo del *processus.* $\mathbf{c}$, pues, representa *la densidad total, por segundo de tiempo, de la propagación* y es *invariante en el continuum mayor;* teniendo esto en cuenta: es *una densidad escalar invariante.* Escribimos:

$$\mathbf{c} = \nu^i \,.\, \mu \frac{df}{dx_i} = \nu^i \,.\, \mu f_i$$

$$= \nu^i \,.\, \mathbf{p}_i \qquad \mathbf{p}_i = \mu f_i,$$

pero todavía estamos *ad portas* puesto que tenemos que tener presente que *hay direcciones* espaciales el momento que fijamos un punto de referencia, que es aquí $P = (x_i)$. Elijamos en este punto un sistema vectorial básico unitario de referencia — sistema en P, — como se acostumbra en el cálculo tensorial y vemos que ν es *una velocidad,* o sea, *un vector,* entonces la ecuación

$$\mathbf{c} = v^i \,.\, \mu f_i \qquad v^i = \nu^i$$

$$= v^i \mathbf{p}_i \qquad f_i = \frac{df}{dx_i}$$

expresa muy bien el proceso de repetición que tiene lugar.

El carpintero aumenta el número de golpes por segundo, pero *como solo dispone de una potencia dada, impuesta por condiciones de orden superior, disminuye el* λ. *Ahora nos damos cuenta que* v *encierra más que una simple velocidad, vemos que* v *consume algo, cuando varía, que afecta al esfuerzo,* puesto que si v aumenta, λ disminuye y viceversa. Aquí, pues, vamos vislumbrando una propiedad de v *que existía oculta.* ¿Qué es? Muy simple, pasemos el factor μ a la componente v^i de la velocidad (frecuencia) y se descubre

$$\mu v^i = \mathbf{s}^i$$

que es una corriente de impulsos. Aparecen, pues, *dos maneras de encarar el fenómeno* de *la repetición,* considerarla como *una punta (uno) que avanza por efecto de una densidad de fuerza en acción en la punta misma,* regulada por un parámetro repetidor (v^i), o podemos considerar *que la punta avanza en virtud de una corriente de impulsos transmitidos por repetición desde el foco a lo largo de la pila integral de unos que constituye el clavo.* ¡Notable dualidad!

Decimos, pues, que, en consecuencia estos dos puntos de vista, *vinculados por una reciprocidad invariante en nuestro continuum mayor* constituyen dos aspectos : 1° mecánica; 2° electricidad.

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i . f_i = v^i . \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{s}^i = \mu v^i; \qquad \mathbf{p}_i = \mu f_i; \qquad v^i = \nu^i; \qquad f_i = \frac{df}{dx_i}$$

μ = índice de cohesión del *continuum* mayor; $\mathbf{c}$ = densidad escalar invariante que mide perfectamente «la cantidad de cosa» que produce el foco.

Vemos que $\mathbf{s}^i$ son componentes contravariantes y $\mathbf{p}_i$ covariantes *de densidades.* Mientras que v^i son componentes contravariantes y f_i componentes covariantes de magnitudes de intensidad.

Aparece, pues, $\mathbf{c}$ como una densidad escalar invariante *en el continuum mayor,* mide *el contenido* de una magnitud, mide *el número de golpes Sylvestrianos que contiene una magnitud espacial,* y *mide la cantidad de impulso producida por repetición,* que ha *corrido desde el foco a la punta* que avanza. Su carácter de *densidad tensorial* está manifiesto, el lector recordará lo que significan *órdenes* de tensores.

Resumiendo :

$$P = (x_i). \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$\nu^i = v^i; \qquad \frac{df}{dx_i} = f_i.$$

f = potencial focal; μ = índice cohesivo del *continuum* mayor

$$\mathbf{s}^i = \mu v^i; \qquad \mathbf{p}_i = \mu f_i$$

$$\mathbf{c} = \sum_i^n \mathbf{s}^i \cdot f_i = \sum_i^n v^i \cdot \mathbf{p}_i$$

en un sistema vectorial básico unitario en P, que podríamos designar como de los (e_i) si se quiere; estamos, pues, en el terreno de *la afinidad* y de la métrica.

Siendo $\mathbf{s}^i$ = componentes de densidad de corriente; $\mathbf{p}_i$ = componentes de densidad de fuerza, fácilmente podemos formular una integral Hamiltoniana invariante.

Puede bien decirse ahora, que la invariante universal *repetición* ha permitido descubrir otro enemigo fásico oculto, precisamente en estas dos relaciones de identidad.

$$\mathbf{c} = \sum_i^n \mathbf{s}^i \cdot f_i = \sum_i^n v^i \cdot \mathbf{p}_i$$

Aquí, pues, está el *fons et origo* de la *densificación infinitesimal.*

Hemos dado el nombre de «Sylvestriano» al golpe de los (f_i) en honor al autor de *la canonización de la cuádrica.* La razón es la siguiente : nosotros mortales apreciamos las dimensiones conscientemente, por medio de *direcciones normales.* Decimos, en consecuencia, que *la acción que canoniza es la acción que densifica y que dimensionaliza.* El golpe (f_i) es una pulsación normal a la línea de propagación, etc.

De esta manera se ha logrado harmonizar en parte el cálculo tensorial y universalizar su significado, pero falta completar el proceso.

La materia aparece como resultante de composiciones tensoriales focalizadas, que reducen la velocidad de propagación a un límite que tiende a cero, aumentando, indefinitamente, por reciprocidad, la densidad Sylvestriana.

Einstein, por una simple *generalización intuitiva,* formuló su ecuación de la gravitación, precisamente valiéndose de esta relación entre *mecánica y electricidad.*

H. Weyl se apercibió de la *necesidad de esta relación.* Aquí, partiendo de una base axiomática de *repetición, se ha llegado con gran sencillez a obtener esa unión,* que siempre ha existido, y siempre se ha comprendido intuitivamente, pero que no se pudo formular porque *el edificio científico estaba mal cimentado.*

DIGRESIÓN 0.58

La luz

Desde el instante que se reconoce, que toda nuestra fenomenología perceptible es *repetición,* se reconoce que todo es *propagación.*

Las explicaciones hechas acerca de órdenes de magnitudes, perceptibles conscientemente, e imperceptibles conscientemente, y la correspondencia de *indeterminaciones,* en un orden de magnitudes, con *determinaciones* en otro orden inmediato inferior permiten, con facilidad, comprender el fenómeno cerebral que se denomina *luz.*

Matemáticamente se puede definir la gravitación luminosa como una propagación compuesta de *repeticiones Sylvestrianas,* infinitamente pequeñas, y una frecuencia contravariante infinitamente grande. Resulta, pues, que percibimos la luz por el fenómeno puramente kinético, que entra en el orden finito consciente de magnitudes *perceptibles visualmente;* pero no podemos percibir la parte «Sylvestriana», o dinámica material *que no entra en el orden finito* de magnitudes perceptibles, conscientemente, por nuestro órgano de «tacto». En virtud de esta distinción, el lector podrá, desde ya, ir relacionando nuestras percepciones conscientes con las divisiones analíticas conocidas, como *proyectivas* y *métricas,* respectivamente.

Nuestro *continuum* mayor admite la propagacion libre, aparentemente, de la *repetición luminosa,* y ésta tiene lugar en una forma perfectamente invariante, i. e., la c de Einstein.

No es posible variar esta c de Einstein. Para que suceda este fenómeno es preciso cambiar la característica cohesiva del *continuum,* lo cual se sabe. Pero hay otro método que ha pasado desapercibido, y éste es por medio de *una focalización* en el *continuum* mayor.

En una focalización puede producirse la composición tensorial siguiente :

$$(c_x \, . \, c_y) \rightarrow 0$$

$$\text{val. abs. } c_x = \text{val. abs. } c_y = c,$$

cuyo significado es manifiesto, i. e., una propagación compuesta que se anula por interferencia normal, anulándose toda cohesión. Puede producirse también en la focalización :

$$(c_x^1 \, . \, c_y^2) + (c_x^2 \, . \, c_y^1) = 2\mathrm{T}_{ik}$$

$$(c_x^1 \, . \, c_y^2) - (c_x^2 \, . \, c_y^1) = \mathrm{H}_{ik}$$

o sea

$$T_{ik} = T_{ki} = \frac{1}{2}(\gamma_{ik} + \gamma_{ki})$$

$$H_{ik} = -H_{ki} = \gamma_{ik} - \gamma_{ki},$$

en que los (γ_{ik}) son los componentes de los tensores que resultan de los productos escalares. Estas formas tan conocidas, son tensores de segundo orden, simétrico y levo-simétrico, respectivamente, y se interpretan como sigue.

Los $T_{ik} = T_{ki}$, tensor «material» dinámico; y los $H_{ik} = -H_{ki}$, tensor «material» kinético. El primero encierra una resultante de traslación, mientras que el segundo encierra una resultante de rotación.

Decimos, en consecuencia, que el límite recíproco de una propagación luminosa es *materia*, por la sencilla razón de que *no podemos percibir conscientemente el orden de magnitud del factor kinético de la propagación con nuestro sentido de tacto, pero sí podemos percibir el factor dinámico con este sentido.*

En otras palabras, el cerebro humano abarca en su potencia de perceptibilidad los dos límites siguientes :

Kinética pura : visión;

Dinámica pura : tacto;

y en virtud de estas dos facultades es que *contamos* y *medimos*. Así :

$$w = v \cdot \delta \qquad w = \text{invariante espacial}$$

$$w = \begin{cases} v_{\rightarrow \infty} \cdot \delta_{\rightarrow 0} & \text{visión : luz} \\ v_{\rightarrow 0} \cdot \delta_{\rightarrow \infty} & \text{tacto : materia} \end{cases}$$

en que v = velocidad de repetición (frecuencia); δ = densidad de acción (longitud de onda).

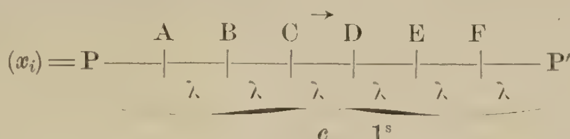
En virtud de la continuidad de nuestras percepciones, como ya se ha notado en otra parte, desaparece ese fantasma matemático llamado geometría abstracta. Vemos, en consecuencia, que *nuestro cerebro focaliza las percepciones*, y al hacer esto desempeña el rol de *un absoluto* en el sentido que Cayley, Clifford, etc., definieron este concepto. Quiere decir que, en nuestro cerebro se relacionan *propiedades proyectivas* y *propiedades métricas*. Hemos de volver sobre esto en otro lugar.

DIGRESIÓN 0.59

La invariante (c) como densidad tensorial

Puede haber alguna duda acerca de la interpretación tensorial de **c**, y como ésta es la base de *todo el edificio geométrico levantado* sobre *la repetición*, se vuelve sobre el punto para elaborar y explayar más el concepto.

Eligiendo el siguiente esquema gráfico se tiene fácilmente :



A = un golpe Sylvestriano encerrando una potencia f, que llamaremos una densificación de fuerza infinitesimal, que *ocupa espacio infinitesimalmente*, gracias a un μ de cohesión que *posee el continuum mayor*. La *densidad de esta potencia* será, pues, μf; una verdadera *densidad* de fuerza mecánica. Un atributo de *materia*.

AB = λ es un desplazamiento producido por la salida de A del foco P que impulsa a B, C, D, E, etc., y obliga la *propagación*. Esta acción de impulso se transmite a lo largo de la fila, partiendo desde P hacia el lado E. Quiere decir que cuando va saliendo A, hay una acción *que recorre la línea*. Llamemos esto *un esfuerzo desde* P; vemos que se repite ν veces en un segundo para llegar de P a P′.

Decimos que ν es *la velocidad de la repetición de impulsión*, que se propaga a lo largo de la fila o línea A, B, C, D, ..., P′. Tiene, por lo tanto, dirección y es vector.

Si, pues, μ es la *resistencia volumétrica unitaria de cohesión del continuum* mayor, entonces $\mu\nu$ será, indudable y clarísimamente, *una densidad de corriente de impulsiones*, que al mismo tiempo *es densidad de corriente material*, y tiene el aspecto de una corriente eléctrica de $\overline{\mathrm{P}}$ a $\overline{\mathrm{P}'}$.

Ahora, **c** abarca en $\overline{\mathrm{PP}'}$ una magnitud de cantidad de *repeticiones* con aspecto de *dimensionalización*, o de densificación, como es evidente, y es una *invariante de nuestro continuum mayor, para nuestra conciencia*. Quiere decir, pues, que conduce a una invariante integral de contenido zonal, o, si se quiere, a una *Hamiltoniana estacionaria*.

Queda así evidenciado su carácter de *densidad tensorial.*

Resulta, por lo tanto :

$f =$ potencia escalar; $\mu =$ índice cohesivo; $v =$ frecuencia de repetición; $P = (x_i)$; $i = 1, 2, 3, ..., n$; tendremos :

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i . f_i = v^i . \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{s}^i = \mu v^i; \qquad \mathbf{p}_i = \mu f_i,$$

quedando sobrentendido el carácter de densidad de $\mathbf{c}$ en oposición al de $c =$ velocidad de propagación.

Se ha supuesto en $P(x_i)$ un sistema vectorial básico de referencia (e_i), que nos servirá para fundar el campo métrico correspondiente.

DIGRESIÓN 0.60

Matemáticas

Siendo $P = (x_i)$, y un sistema vectorial básico (e_i) en P, podemos escribir, como antes, dejando indeterminado el número de dimensiones:

$f^i = \dfrac{df}{dx_i}$; $\mu =$ índice escalar cohesivo del *continuum* mayor; $\mathbf{s}^i = \mu v^i$;

$v^i =$ componentes vector velocidad; $\mathbf{p}_i = \mu f_i$

$$\mathbf{c} = \sum_i^n \mathbf{s}^i . f_i = \sum_i^n v^i \mathbf{p}_i; \qquad i = 1, 2, 3, ..., n$$

evidentemente $\mathbf{c}$ es una densidad escalar invariante.

Consideremos ahora a

$$c = v^i . f_i$$

y formemos la métrica

$$(cc) = \sum_{ik}^n v^i v^k . (f_i f_k) \qquad \sum_{ik}^n g_{ik} . v^i v^k$$

$$g_{ik} = g_{ki} = (f_i f_k),$$

y como sabemos ser en el *continuum* mayor :

$$c^2 = \sum_{ik}^n g_{ik} v^i v^k = \text{constante}$$

esto nos dice que la propagación *es rectilínea uniforme*. Esto es evidente. No debe perderse de vista que aquí c es una *velocidad*. Así que estamos en el caso Einsteniano de

$$g_{ik}v^i v^k = (u^k \cdot u_k) = \text{invariante, etc.}$$

Por otra parte, la constancia de c debe interpretarse convenientemente en el sistema de representación.

Una focalización sería muy fácil de representar, pues no habría más que invertir *sentidos* en las direcciones coordenadas, o vectoriales (componentes). En seguida, en virtud de la invariación de la propagación de gravitación en el *continuum* mayor no habría sino suponer fijo $P(x_i)$, y hacer girar el sistema al rededor de este punto, *en una forma continua,* mediante *un grupo de matrices* continuo. *Resultaría una focalización.* Para determinar el «apilamiento infinitesimal» sería cuestión de conocer *una época* y valerse del teorema de Gauss, etc. De esta manera llegaríamos a formarnos una idea de la *densificación*, pero sería solamente *aproximada*. La *eferencia* interviene, y esto complica enormemente, pues no conocemos la diferencia entre golpes «Sylvestrianos» que llegan a la focalización, como gravitación obscura, y parten como luminosa. Oportunamente hemos de ver que siendo el número un símbolo de repetición, es en el estudio de las propiedades de los números donde debemos buscar la explicación de nuestras percepciones conscientes dinámicas, e inconscientes, que llamamos *materia*.

Si nos fijamos en las ecuaciones fundamentales notaremos que

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i \cdot f_i = v^i \mathbf{p}_i$$

implica en el foco las condiciones siguientes ;

$$\frac{d\mathbf{H}^{ik}}{dx_k} = \mathbf{s}^i, \qquad \frac{d\mathbf{T}_i^k}{dx_k} = \mathbf{p}_i,$$

suponiendo condiciones de un espacio euclideano plano.

Este resultado, invariante, tensorial, es importante; puesto que nos hace percibir que la evolución astral es una resultante de dos formas de acción, a saber :

Repetición dinámica traslativa, o los $T_{ik} = T_{ki}$,

Repetición dinámica rotativa, o los $H_{ik} = -H_{ki}$,

pudiendo el lector suplir los diversos significados físico-geométricos que tienen estos dos tensores de segundo orden.

En el *continuum* mayor las cosas son simples, debido a la invariación de **c**; pero, en los *continuums* menores o quanta, en que se tiene $(c \cdot c)$ variable por anisotropía espacial, sobrevienen los cálculos complicados, y ya no sería más el caso de ser

$$\frac{dT_i^k}{dx_k} = \mathbf{p}_i,$$

sino

$$\frac{dT_i^k}{dx_k} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\alpha\beta}}{dx_i} T^{\alpha\beta} = \mathbf{p}_i$$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha},$$

en que reconocemos el término de «curvatura espacial». Hemos de ver oportunamente cómo este término expresa matemáticamente *la divergencia de la condición plana,* y cómo significa una alteración de curvatura esférica.

DIGRESIÓN 0.61

La reciprocidad

El edificio geométrico del cálculo tensorial harmonizado, como el del cálculo de tensores, en general, descansa sobre *la invariación*, aparte de todo significado físico. La repetición no es más que *una invariación* en el sentido matemático de la palabra.

Es necesario ahora notar ¿en qué estriba esta invariación? Vemos fácilmente que es en la *reciprocidad.*

Quiere decir, pues, que esta relación fundamental, es la que se ha llamado *concomitancia,* cuando se estudiaba la teoría de determinantes. Ahora se descubre que esta *concomitancia* es, a la par de la *repetición, la ley más profunda que existe en nuestro mundo de percepciones conscientes.*

Si un objeto *mantiene su color,* es en virtud de *una invariación y revela la existencia de una contravariación o contragrediencia y concomitancia,* en una palabra : *una reciprocidad.*

Si un cuerpo mantiene su temperatura, es por *invariación, existe una concomitancia entre una aferencia* y *una eferencia* y decimos : *la aferencia es contravariante a la eferencia. Son, pues, recíprocas. Siguiendo este razonamiento, podemos descubrir una serie de leyes que yacían ocultas* bajo los *caracteres fásicos de fenómenos en general.*

Es menester cultivar, matemáticamente, este hábito de «ver los fenómenos» desde este punto — no fásicamente, sino «invariantemente», — buscando la propiedad *estática.*

La vida de un astro depende exclusivamente de *una aferencia* y *una eferencia,* tan exactamente como la vida de *cualquier organismo en nuestro mundo infinitesimal.* El astro es *una focalización de gravitación obscura* que *se traduce* en *una radiación estacionaria, a simetría esférica,* en nuestro *continuum* mayor, de *gravitación más compuesta.* La misma focalización engendra una densificación en $\mathrm{P} = (x_i)$ y la misma gravitación obscura, al incidir en esta densificación, *su propia obra,* se compone en *dos formas recíprocas :* una que se propaga en sentido inverso, *la eferencia,* otra, que penetra al *quantum.* Aquí tenemos, en consecuencia *una invariación,* un color luminoso para nuestra conciencia; la observación de este *color* sirve de índice para conocer *una época de evolución,* o mejor, la fase de la evolución

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i . f_i,$$

si $\mathbf{c}$ es invariante, es porque $\mathbf{s}^i$ y f_i son contravariantes, etc.

La reciprocidad, al lado de la fundamental *repetición,* contiene «la llave» de nuestro *mundo de percepciones.* Vemos en *la reciprocidad* un *doublet* que forzosamente debe repetirse en el mismo *golpe Sylvestriano* original que emite el foco, y en virtud de la cual se tiene

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i f_i = v^i \mathbf{p}_i$$

precisamente.

DIGRESIÓN 0.615

Especulación matemática

La ecuación fundamental de propagación de acción gravitante, en el *continuum* mayor, por emisión de un foco estático, radial esférico, toma la forma :

$$\mathrm{P} = (x^i) \qquad \mathbf{c} = \mathbf{s}^i f_i \qquad f_i = \frac{df}{dx_i}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \qquad = v^i \mathbf{p}_i \qquad \begin{aligned} \mathbf{s}^i &= \mu . v^i \\ \mathbf{p}_i &= \mu . f_i \end{aligned}$$

μ = índice de cohesión o densificación del *continuum* mayor; estas dos simples expresiones encierran estas otras

$$\mathbf{H}^{ik} = \mu H^{ik} \qquad \frac{d\mathbf{H}^{ik}}{dx_k} = \mathbf{s}^i$$

$$\mathbf{T}^{ik} = \mu T^{ik} \qquad \frac{d\mathbf{T}_i^k}{dx_k} = \mathbf{p}_i,$$

lo cual quiere decir que en el foco de emisión tenemos dos condiciones tensoriales completamente distintas; la de los

$$T_{ik} \quad \text{o} \quad \mathbf{T}_{ik}$$

y la de los

$$H_{ik} \quad \text{o} \quad \mathbf{H}_{ik}.$$

Decimos que este estado es de *densificación progresiva* por medio de las composiciones

$$T_{ik} = \frac{1}{2}(\gamma_{ik} + \gamma_{ki})$$

con deformación, y el otro estado que obedece a los

$$H_{ik} = \gamma_{ik} - \gamma_{ki}$$

encierra la rotación y el fenómeno de « magnetismo ».

Trataráse de señalar la importancia de este hecho. Los (H_{ik}), en cierto período, *o fase de la evolución ascendente* astral (en este caso el foco), han predominado, llegando a un valor hamiltoniano estacionario, y luego descendiendo pasan a «segunda categoría». Los (T_{ik}), inversamente, pasando de categoría ínfima, y creciendo, recién entran a predominar cuando los (H_{ik}) alcanzan al punto estacionario, y desde ese momento, en adelante, predominan gradualmente, etc. Pero ya tiene *rotación* axial el astro, por efecto de los (H_{ik}), predominantes *al principio* : densificación mínima infinitesimal. Fácil es percibir, por efecto de densificación, dos procesos :

Polaridad { giroscopía magnética,
giroscopía dinámica o mecánica,

y como resultante de la desigual marcha de los (H_{ik}) y de los (T_{ik}) : *una divergencia,* que se traduce en un eje de rotación dinámica no coincidente con el eje magnético.

Siendo este fenómeno de carácter general, invariante, debe poderse observar en cualquier astro. La *deformación* y *rotación* determinan el fenómeno de la *rotación zonal heterogénea,* i. e.: *el astro se divide en fajas zonales, dotadas de diferentes tensores lineales,* como *características de movimientos angulares respectivos.* Recordar siempre que la velocidad, o movimiento angular, es *un tensor lineal* y no un vector, como se acostumbra creer.

La inclinación del eje de rotación mecánico, relativamente al magnético, es el fenómeno a que responde nuestra inclinación axial relativamente a la eclíptica. Concretándonos a nuestro caso terrestre, como ejemplo de mayor interés, se observa lo siguiente: nuestro eje de rotación « magnético » y nuestro eje de rotación « dinámico » deben *no coincidir.*

El ángulo entre uno y otro oscila, aproximadamente, al rededor de 23°. No siendo homogéneo nuestro planeta tampoco podrán estos dos ejes intersectarse en el centro de figura de la densificación (tierra). El eje magnético siendo llevado por el movimiento mecánico describe un cono de dos napas, como es evidente.

La observación nos demuestra claramente que los (H_{ik}) no son magnitudes constantes en nuestro planeta; existe variación fásica. Esto es muy importante, puesto que podemos deducir una serie de consecuencias que interesan de cerca a la humanidad, y que están a nuestro alcance.

Quiere decir, pues, que sabemos perfectamente que los valores de los (H_{ik}) son variables. Hay fluctuaciones de corto período, dentro de la marcha harmónica secular. Refiriendo estas fluctuaciones al tiempo planetario

$$\frac{dH_{ik}}{dt} = a$$

podemos, por medio de la observación de a, conocer el comportamiento de la perturbación. Dos ejemplos: siendo a periódico, durante un intervalo relativamente largo tendríamos

$$\frac{dH_{ik}}{dt} = \text{periódico},$$

y diríamos que, en virtud de una conocida *ley de áreas,* la causa perturbadora puede describir una órbita plana al rededor de nuestro planeta. Este es un caso; el otro sería el recíproco: nuestro planeta describiendo la órbita al rededor de la causa. En el primer caso estaría

nuestro satélite *la luna,* y en el segundo nuestro sol. Las demás fluctuaciones sometidas a un proceso de « análisis harmónico » darían como resultado la posible ubicación de los « perturbadores » en el *continuum* mayor. He aquí, pues, una razón de fundamento para el estudio continuado y prolijo del fenómeno magnético. Fácil será al lector descubrir la razón matemática de las órbitas, geodésicas, planas, si tiene en cuenta que una aceleración angular periódica puede corresponder a una superficie paramétrica plana de homofocales, etc.

Pongamos ahora atención en los T_{ik}. Estos son los que acusan movimientos de *deformación material.* Decimos, ahora, que de acuerdo con nuestra teoría natural de la *focalización,* como origen de vida astral, y la *repetición* de *una* acción de gravitación en distintos puntos del *continuum supra,* como *fons et origo* de esta *concentración :* existe *una íntima y absoluta relación entre* tres cosas : los *focos emisores* dispersos, nuestro *continuum mayor* con su período μ de cohesión y la *focalización* o *apilamiento,* i. e., *densificación.* Sin entrar en detalles, que después estudiaremos, diremos que todo fenómeno perceptible sobre la superficie de la tierra responde a *una alteración perturbadora exterior.* Estas alteraciones pertenecen a todos los órdenes de magnitud, desde el infinitamente pequeño hasta lo infinitamente grande (para nosotros).

La geología de nuestro planeta y la configuración superficial de la costra contiene la historia y marcha del proceso de evolución. *Nada sucede espontáneamente.* Todo está escrito (densificado) y todo está archivado, y el proceso sigue continuamente, no hay más que abrir los ojos y leer. En otra digresión indicaremos cómo el ser humano y la vida orgánica contienen un magnífico « plano » de la evolución. ¿ Quién diría que la distancia de nuestros ojos del plano meridiano de simetría lateral nos habla sobre la « velocidad angular del movimiento de rotación axial de nuestro planeta » ? ¿ Quién sospecharía que no tenemos dos cabezas ciclópeas debido a una simple ley mecánica de composición de movimientos harmónicos de períodos diferentes ?

DIGRESIÓN 0.62

Composición recíproca

Teniendo en cuenta notación y significado usuales, si se tiene:

$$c_x = a_i \xi^i$$

$$c_y = b_i \eta^i$$

$$(c_x^1 c_y^2) = a_i b_k \xi^i \eta^k = \gamma_{ik}$$

$$(c_x^2 c_y^1) = a_k b_i \xi^k \eta^i = \gamma_{ki}$$

$$2T_{ik} = \gamma_{ik} + \gamma_{ki}; \qquad H_{ik} = \gamma_{ik} - \gamma_{ki}.$$

Métricamente:

$$(c^2) = \sum_{ik}^{n} g_{ik} \xi^i \xi^k$$

$$\xi^i = (c \, . \, e_i),$$

covariación escalar.

$$g_{ik} = g_{ki} \qquad \xi^i = g^{ik} \bar{\xi}_k$$

$$|g_{ik}| \neq 0 \qquad \xi_i = g_{ik} \bar{\xi}^k.$$

Si, pues, la composición que penetra en el *continuum* es la de los T_{ik}, aquella que es recíproca complementaria es la de los

$$T^{ik} = g^{ir} g^{ks} T_{rs}$$

y si penetran los H_{ik} se tendrá la recíproca

$$H^{ik} = g^{ir} g^{ks} H_{rs}.$$

Teniéndose siempre los estados estacionarios de deslinde:

$$T^{ik} T_{ik} \qquad \text{y} \qquad H^{ik} \, . \, H_{ik},$$

esto es:

$$T^{ik} \, . \, T_{ik} = |T|$$

$$H^{ik} \, . \, H_{ik} = |H|$$

formas muy conocidas en cálculo tensorial.

Si

$$c_x = a_i \xi^i$$

se transforma en

$$c_x = \bar{\alpha}_i \xi^i$$

tendrá, forzosamente, que ser

$$\sum_i a_i \xi^i = \sum_i \bar{\alpha}_i \bar{\xi}^i,$$

quiere decir que si

$$\bar{\alpha}^i = \lambda_i^k a_i$$

entonces

$$\xi^i = \lambda_k^i \bar{\xi}^k,$$

o sea, con el signo usual de suma

$$\bar{\alpha}^i = \sum_k \lambda_i^k a_k$$

$$\xi^i = \sum \lambda_k^i \bar{\xi}^k$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \qquad |\lambda_i^k| \neq 0.$$

Aquí tenemos, pues, expresadas matemáticamente las formas invariantes en que se producen los fenómenos de aferencia y eferencia : de propagación de gravitación sea luminosa, obscura, térmica, eléctrica, etc. Siendo los T_{ik} y los H_{ik}, las formas tensoriales básicas más simples de todo *quantum* material focalizado.

Oportunamente comprenderemos que la explicación matemática del fenómeno cerebral que llamamos *atracción* reside en «una reciprocidad» y que, por ejemplo, electricidad positiva y electricidad negativa, no son sino dos formas recíprocas, una de la otra, dos propagaciones contravariantes.

DIGRESIÓN 0.635

Percepciones. Focalizaciones

El eminente sabio matemático inglés A. Cayley presidió la reunión de la *British Association for the Advancement of Science* en 1883. Hizo un discurso inaugural, magistral, resumiendo el estado de la ciencia en su día y llamando la atención a las nuevas ideas espaciales de Riemann.

Fué en los preámbulos de ese discurso que Cayley despachó, con cierta ligereza, los fundamentos filosóficos de las matemáticas y con-

solidó la funesta teoría corriente de que la geometría era una ciencia abstracta, engendrada por nuestro cerebro de una manera especialísima, que nada tenía que ver con las cosas reales del mundo. Así, pues, nacieron los conceptos de punto matemático, línea, plano, etc.

Cayley existió en el tiempo de la « acción a distancia ». Esto explica su error y sobre todo su ligereza en aceptar «axiomas» corrientes. Admitió *un salto* desde el cero de impercepción hasta el finito de percepción consciente. Para él terminaba la perceptibilidad con el *punto visible,* que sabía ser una magnitud finita, y así la definía.

Sobre la base de la *repetición* procedemos a corregir este error y reconstruir el edificio científico. Llegaremos al siguiente resultado: *no hay geometría abstracta,* como la concibió Cayley.

Sencillísimamente, decimos: una percepción es el fenómeno cerebral que responde a una acción exterior, en nuestro *continuum* mayor ambiente. Acción es repetición; por lo tanto, percepción y acción se corresponden exactamente. En otras palabras, nuestras percepciones arrancan desde *un límite inferior, cero, de acción exterior* y crecen en *intensidad* con la acción hasta adquirir un valor que pertenece al *orden de magnitudes conscientes* y que llamamos finito consciente. Estas percepciones pueden, con la acción exterior, seguir creciendo en magnitud hasta un cierto límite, pasado el cual sobreviene nuevamente la inconsciencia o indeterminación. Resulta, pues, que lo que desaparece es *el orden finito de magnitud consciente,* y *no la percepción.* Por esto puede *abstraer* el cerebro.

Este fenómeno tiene su réplica en el siguiente ejemplo, ya citado en otra parte, la « difracción de la luz ». Ya vimos que en un monte de árboles la luz se proyecta en círculos, elipses, etc., sobre el suelo o plano de proyección. Si aproximamos el plano de proyección a los intersticios, entre hojas, por donde penetra la luz solar, notaremos que a cierta distancia se deformarán esas cónicas y se asomarán, nítidamente, los contornos de los intersticios. Precisamente, es *a esta transición* que corresponde lo que hemos llamado : *orden de magnitudes conscientes, o punto consciente. Es así* cómo las percepciones, creciendo en intensidad progresivamente, asoman al *orden consciente* de nuestro cerebro.

Quiere decir todo esto, simplemente, que nosotros existimos en la más completa e íntima relación, o contacto, con el *continuum* espacial ambiente, universal. *Toda acción — absolutamente toda acción — en nuestra vecindad ambiente, penetra a nuestro cerebro* por los conductos de aferencia que llamamos sentidos, *se focaliza* y produce densificación

infinitesimalmente (continuidad), a lo cual sigue la eferencia interior en nuestro *quantum* corpóreo.

Esto es de una importancia trascendental. Decimos con Locke: *nisi ipse intellectu quod prius non fuerit in sensu,* y exclamamos: ¡ *Mirabile dictu !* Nos hemos, así, emancipado de la clásica escuela de acción a distancia, i. e., las discontinuidades, etc.

Vemos, en consecuencia, que no hay tal « geometría abstracta », y que tal frase carece de sentido. Cuando estudiamos el problema de la curvatura espacial y de los espacios esféricos derivados del espacio *incoherente,* o sin cohesión, euclideano plano, hemos de darnos cuenta que así como nace una dimensionalización, o un *quantum,* en una forma continua y evoluciona, nace igualmente un astro en el firmamento y evoluciona; y así también nacen nuestras percepciones, por acciones infinitesimales exteriores inmediatas, y evolucionan produciendo el fenómeno colosal que Aristóteles, el Estagirita, llamó νόος. En otras palabras, tenemos « actividad intelectual », y conservamos el compás de la evolución universal, por *la continuidad de nuestras percepciones.*

Pues, si *percepción* responde a acción, y acción es repetición, entonces *el número, siendo símbolo de repetición, encierra la explicación matemática de la fenomenología perceptible.* Esto lo hemos de desarrollar en otra digresión. El misterio está en *la acción.* De paso, diremos que el estudio de las propiedades del *número,* es quizá el más difícil de los estudios matemáticos y que aún está sin solución el problema de los números primos entre dos límites numéricos dados. Este problema tiene como similar aquel otro relativo al número de invariantes independientes de una cuantica cualquiera entre dos límites de órdenes — grados — determinados, que resolvió admirablemente Cayley para el caso de una binaria.

Resumiendo, vivimos en el más absoluto e íntimo contacto con el *continuum* ambiente mayor. *Este contacto con el ambiente es lo que constituye el fenómeno de nuestra perceptibilidad,* y no nos fundimos con este ambiente por una ley de conservación de curvatura que veremos oportunamente. *Somos una focalización* y nuestra existencia obedece al siguiente esquema hueco :

$$\text{Existencia} = \begin{cases} \text{Aferencia espacial,} \\ \text{Focalización,} \\ \text{Eferencia espacial.} \end{cases}$$

Somos, pues, como el mismo sol. Simplemente: *somos un continuum de repetición* en todos los órdenes de magnitudes.

DIGRESIÓN 0.6355

Manchas solares. Eclipses por aferencia

La repetición nos permite formular la siguiente teoría, de fácil comprobación, respecto a las manchas solares y sus períodos: máximos y mínimos.

Ya se ha explicado que un astro, como el sol, es una focalización espacial de acciones, por *aferencia*, y una radiación de las mismas. *compuestas*, por *eferencia*. Siendo la eferencia la componente *kinética* de una invariación, cuya componente recíproca *dinámica* se propaga en el foco y *densifica* en el mismo. Vamos ahora a formular una prueba práctica de este proceso de focalización. Supongamos que sea exacto; entonces es evidente que si alguna densificación espacial (materia) *obstruyera la corriente aferente* se debería producir *una divergencia del estado normal,* dentro de la zona determinada por *la proyección del obstáculo, por los rayos aferentes, sobre la focalización,* i. e., la foto-esfera solar. Siendo esto evidente, pasemos a observar la posible naturaleza de esa corriente aferente solar y de determinar las proyecciones de los obstáculos más cercanos, o sea los grandes planetas del sistema solar.

Miremos al cielo y observemos *la faja galáctica,* o vía láctea. Percibiremos que si el sol recibe una corriente de acciones aferentes, *esta corriente debe ser más densa dentro del espacio conoidal determinado por la proyección central de la faja, desde el centro del sol,* que fuera de esta zona espacial.

Observando más detenidamente, nos damos cuenta que esta faja galáctica puede simbolizarse geométricamente como la *traza de dos planos paralelos sobre una esfera,* cuyo centro fuese ocupado por el sol. Y también podemos simbolizar, sobre la misma esfera, la faja del *sistema planetario* con un par de planos paralelos, comprendiendo todos los planos orbitales planetarios. Si ahora nos fijamos en la situación relativa de estas dos trazas descubriremos que, *con relación a la esfera, una es la polar de la otra,* muy aproximadamente. Quiere decir que la faja galáctica pasa, aproximadamente, por los polos de la eclíptica. Es así, y sabemos que en el polo sur la faja se interrumpe, presentando un aspecto de menor espesor, muy notable.

Todo esto conduce a la siguiente consideración final: *que cuando*

un planeta penetra el espacio conoidal, ya descrito, su sombra aferente sobre el foco solar será más intensa que cuando se halla fuera del conoide. De aquí que sea posible calcular, con mucha facilidad, aquellas *anomalías orbitales interesantes de penetración, estacionamiento y emersión al conoide,* para los planetas mayores, i. e., Saturno y Júpiter, a ambos lados de sus respectivas órbitas, y así comparar estos cálculos con la observación de las manchas solares. Calcular las conjunciones, parciales o totales, dentro del conoide, etc., y comparar resultados con la observación. Estos cálculos habrían de dar los períodos de máximos y mínimos en todos los órdenes de frecuencias o magnitudes; sólo habría que calcular las inmersiones y emersiones para todos los demás planetas del sistema solar.

Como el sol tiene un movimiento de rotación axial, estamos en un problema de análisis harmónico, muy parecido al de las mareas sobre nuestro planeta.

Para hallar *el efecto* de la mancha sobre nuestro planeta, basta dibujar la traza de la mancha *proyectada desde el centro de la tierra,* sobre la superficie del planeta mismo; *problema que requiere especialmente tomarse en cuenta dos movimientos de rotación diferentes.* La traza de esta proyección, pasando por una zona terrestre volcánica, sin duda daría lugar a fundadas aprehensiones, etc.

Es de esta manera que la *repetición* resuelve el problema de *las manchas solares.* Pero no termina aquí el alcance de nuestra invariante universal.

Supongamos que, *así como el sol densifica al cuerpo humano* (como ya se explicó), *también densifica a los planetas de su sistema.* Esperaríamos encontrar el efecto del conoide galáctico traducido en una correspondiente densificación por eferencia sobre cada uno de los planetas así:

1° La densificación sobre la foto-esfera solar sería máxima según la traza del conoide, harmonizada por la rotación axial del sol;

2° La desigual constitución de la faja galáctica y su interrupción en el polo sur haría que en el sol hubiera *más densificación en el hemisferio norte solar que en el hemisferio sur,* con la característica de estar dirigida la faja de densificación según un meridiano solar, i. e.: *densificación según husos dirigidos de norte a sur, solar.* Esto se traduciría fielmente en los planetas del sistema en los cuales esperaríamos encontrar *exceso de protuberancia terrestre en un hemisferio* (norte) *relativamente al otro hemisferio, y estas protuberancias dirigidas de norte a sur.*

Sencillamente, todo esto sale de la ley invariante de que *nuestro universo es un continuum de repetición.* Todo se repite, en todos los órdenes de magnitudes. Un país se densifica por la obra humana, de la misma manera que el universo perceptible. Una ciudad es una focalización de orden mayor que una villa que obedece la misma ley, y así también es nuestro cerebro una focalización, y nuestro sol. Densificación infinitesimal, universal.

DIGRESIÓN 0.636

Relaciones proyectivas y métricas

Nadie ignora esta división natural de problemas analíticos. Tan natural es, que ha cesado de llamarnos la atención, pues en cierta manera parecen ser el uno complemento del otro. Sin embargo, esto no es así y la división obedece a nuestra configuración cerebral. Relaciones proyectivas son las relaciones basadas sobre *percepciones kinéticas o visuales.* Éstas no son alteradas por proyecciones y sabemos que transformar linealmente *es proyectar,* ni más ni menos. Relaciones métricas son las que dependen de *nuestra percepción dinámica, o tacto, con o sin intervención de la visión.*

Relacionar la «proyectiva» con la métrica ha sido el objeto de la ciencia desde los días de Riemann. Si mal no recordamos, fué Poncelet el primero en notar la propiedad analítica de los círculos como curvas semejantes que tienen, *todos,* comunes dos puntos imaginarios en el infinito. Es hoy una conocidísima propiedad y se designan esos puntos como puntos circulares al infinito. Si tenemos presente que una recta es un caso límite del círculo, podemos extender a la recta lo anterior, diciendo que toda recta corta al *absoluto* en dos puntos, i. e., los dos puntos circulares anteriores. Bien conocemos la relación entre estos puntos circulares y las cónicas, y en especial los focos y directrices de las mismas. La analítica de Salmon abunda en propiedades de estos puntos. Pero notemos que *una distancia entre dos puntos* puede expresarse como *una relación anarmónica entre estos dos puntos y los dos circulares de la recta que los une;* y notemos que esta relación *es invariante.* Fácil es fundar toda la geometría sobre esta fundamental métrica, o distancia entre dos puntos, como sabemos y se hallará explicado en el texto en otro lugar. Aquí, pues, tenemos *un*

vínculo entre relaciones proyectivas y relaciones métricas. *Necesitamos valernos del absoluto* para poder pasar de una clase de problemas a la otra. Y esto lo hace, *naturalmente, nuestro cerebro*. Esto es, *relaciona las percepciones conscientes kinéticas, o visuales, y las dinámicas, o de tacto.*

Esta intervención del « absoluto » es muy interesante. Fijémonos en el modelo Klein plano y luego generalizaremos para un espacio, siguiendo el método de Cayley, eligiendo una superficie umbilical como absoluto. Vemos que en el plano Klein *dos rectas no se cortan necesariamente* y que por un punto cualquiera *podemos trazar una infinidad de rectas que no cortan a otra del plano.* Euclides, en su célebre postulado, nos enseñaba que sólo era posible trazar por un punto dado una recta que no cortara a otra, i. e., la paralela — se entiende en un plano.

Ahora, si tenemos todo esto en cuenta, y también lo recién dicho acerca de la deducción de relaciones métricas de las relaciones proyectivas, valiéndonos de *una forma cuadrática, como absoluto,* podemos ocuparnos de nuestro cerebro, matemáticamente. Claro está que cuando llamamos al absoluto : una forma cuadrática, lo hacemos en todo el sentido más lato y general posible, sin precisar si los términos de la cuadrática son positivos o negativos, esto es, *los supondremos siempre* de origen *positivos*, admitiendo que pueden ser imaginarios o complejos en casos especiales.

Hemos dicho, pues, que nuestro cerebro focaliza por aferencia las percepciones. Estas percepciones pueden ser *kinéticas o luminosas puramente,* y las focalizamos por nuestra *visión, kinéticas* y *dinámicas, mixtas,* y las focalizamos en forma mixta por medio de *visión* y *tacto, dinámicas o materiales cohesivas puramente,* y las focalizamos por nuestro *tacto.*

Ahora, ¿cómo se demuestra que podemos tener *aferencias exclusivas de visión,* independientes del tacto, en un extremo fásico, y *aferencias exclusivas de tacto, independientes de visión,* en el otro extremo? La prueba del fenómeno es muy sencilla. Supongamos, con Locke, un ciego acostumbrado a distinguir por tacto entre *una esfera* y *un cubo.* Si colocamos éstos sobre una mesa y milagrosamente concedemos al hombre su *visión, no podrá decir cuál es la esfera, ni cuál el cubo,* como es evidente. *Sólo podrá hacerlo después de tocarlos, mirándolos.* He aquí, en breves palabras, condensado el significado del absoluto cerebral. La recíproca es también exacta.

Quiere decir que las aferencias de visión pura y tacto puro no se

intersectan *en el finito consciente* y *sólo pueden hacerlo en el absoluto*, i. e., *mirando y tocando a la vez.* Descubrimos así que pueden haber una infinidad de percepciones aferentes que no intersectan a otra determinada, así como en el modelo de Klein pueden haber una infinidad de rayos por un punto que no cortan a otro en el plano, *y que sólo podrán relacionarse en el absoluto, cortándose allí.*

Todo esto es lo mismo que sentar lo ya observado, i. e., *no existe geometría abstracta.* El cerebro no posee un mecanismo especial, diferente de nuestra perceptibilidad, para « engendrar lo abstracto ».

Comprendido esto, se comprende el dilema de Riemann, quien encontró imposible conciliar los conceptos básicos de:

Situar con la métrica de $\left\{ \begin{array}{l} \textit{contar,} \\ \textit{medir,} \end{array} \right.$

ahora nos damos cuenta del por qué de esto.

El lector podrá interpretar fácilmente el significado matemático de *la invariación de la forma fundamental cuadrática pitagórica,* i. e.; es condición de transformaciones lineales infinitesimales *que no alteran la estructura puntual del elemento espacial,* esto es, *que no alteran la densidad escalar constante* del elemento, o lo que es lo mismo: *que no alteran la curvatura esférica del elemento.* Pues se ha de ver, en la otra parte, la demostración analítica del teorema que: todo espacio continuo es esférico constante en sus elementos espaciales infinitesimales, etc. Alterar la curvatura espacial es alterar la densidad y, por lo tanto, su estructura puntual: cambiar la forma métrica fundamental.

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n} g_{ik}\xi^i\xi^k = \sum_{i}^{n} \xi^i\xi_i$$

$$g_{ik} = g_{ki}$$

y en un sistema normal geodésico en $P = (x_i)$ se tiene *la escalar Riemann de curvatura:*

$$R = g_{ii\,.\,kk} - g_{ik\,.\,ik}$$

$$g_{ik\,.\,rs} = \frac{d^2 g_{ik}}{dx_r\,.\,dx_s}$$

$$g_{ik} = g^{ik} \qquad \text{y} \qquad g_{ik}g^{ik} = g^{ik}\,.\,g^{ik} = 1$$

como se sabe.

En síntesis: *no hay geometría abstracta y nuestro universo perceptible es un continuum de repetición, siendo el número, símbolo de repetición.*

DIGRESIÓN 0.64

La solución

Einstein formuló su ecuación hamiltoniana

$$\int G \, . \, dx = \frac{1}{2} \int R \sqrt{g} \, . \, dx$$

basándose en una simple *analogía intuitiva,* que puede expresarse como sigue: la correspondencia entre *substancia* y *acción eléctrica*, debe ser una propiedad invariante que subsiste entre *materia* y *gravitación*, esto es, sintéticamente, la solución einsteniana. Se ha visto que esto es exacto. La dificultad enorme que tuvo que vencer Einstein no dependía de él sino de un defecto *del instrumento de análisis que utilizaba.* Realmente causa admiración la forma en que el sabio alemán formuló la expresión escalar

$$\frac{1}{2} R \sqrt{g},$$

fué un triunfo de sagacidad y habilidad matemática. Hasta este momento, recorriendo el camino seguido por Einstein para descubrir esta invariante de curvatura, el autor de la presente está convencido que el método resultó de un proceso «inverso» de razonamiento. como esas obras que se principian por el final y se remontan por retrogradación. Quiere decirse, que Einstein empezó por sentar que existía una forma posible de expresión

$$R = g_{ik\,.\,ik} - g_{ii\,.\,kk}$$

en un sistema ortogonal coordenado, geodésico, en un punto O, y por medio de transformaciones sucesivas remontó a una expresión original de carácter general

$$T = \sum \lambda_{ik\,.\,rs} g_{ik\,.\,rs} + \lambda = -aR + \lambda,$$

en la que existe simetría doble:

$$\lambda_{ik\,.\,rs} = \lambda_{ik\,.\,sr}$$

$$\lambda_{ki\,.\,rs} = \lambda_{ik\,.\,rs}$$

y

$$g_{ik\,.\,rs} = \frac{d^2 g_{ik}}{dx_r \, . \, dx_s}$$

etc. (notación del profesor Weyl), dejando así demostrada la posibilidad de fundar una invariante escalar de curvatura Riemann, que contuviera las derivadas de segundo orden de g_{ik} en forma lineal solamènte, y no pasando de este orden. Este fué un triunfo de análisis formidable.

Soldar la mecánica y la electricidad en una sola entidad fué imposible tarea. *Esta es la solución verdadera buscada* y esta es la solución que hemos obtenido gracias a la invariante universal, base de toda la fenomenología perceptible consciente, o sea, la repetición.

Elijamos un punto cualquiera como centro de propagación

$$P = (x_i) \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

sea t el tiempo planetario, f un potencial escalar, μ *una densidad escalar de cohesión,* teníamos :

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i f_i = v^i \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{p}_i = \mu f_i \qquad f_i = \frac{df}{dx_i}$$

$$\mathbf{s}^i = \mu v^i \qquad v^i = \nu^i = \text{comp. vect. veloc.}$$

donde se observa que la densidad escalar invariante de la traza luminosa puede estudiarse desde dos puntos de vista que son *recíprocos* : *¡ mecánica y electricidad !* Esto es verdaderamente colosal y nos demuestra que tanto la substancia material como la substancia eléctrica y sus respectivas « acciones » no son más que *una cosa en el fondo.*

Esta cosa es *repetición.* Aquí, pues, tenemos el *centrum centrorum* que se buscaba, y aquí está la gran solución.

Para hacer ver esto vamos a indicar someramente cómo por un simple cambio de fraseología matemática, deducimos todas las formas de la teoría de Mie, a la par de las formas clásicas mecánicas. Nada puede ser más sencillo y más claro.

Consideremos a

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i f_i = v^i \mathbf{p}_i$$

ahora tomemos el punto de vista eléctrico : se ve que la hamiltoniana es :

$$\int_G \mathbf{c} dx = \int_G (\mathbf{s}^i f_i)\, dx = \int_G (v^i \cdot \mathbf{p}_i)\, dx.$$

Aplicando los principios conocidos tenemos :

$$\mathbf{s}^i = \mu s^i = \frac{d\mathbf{H}^{ik}}{dx_k}$$

en que

$$\mathbf{H}^{ik} = \mu H^{ik}$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{F}_{ik} s^k,$$

donde

$$\mathbf{F}_{ik} = \mu F_{ik}$$

según la notación de Weyl, campo electro magnético. La hamiltoniana estacionaria da por variación

$$\partial \int_G \mathbf{c} dx = 0,$$

de donde:

$$\int_G \partial (\mathbf{s}^i f_i)\, dx = 0$$

$$\int_G \partial (v^i \,.\, \mathbf{p}_i)\, dx = 0,$$

que nos dan las condiciones cuyas formas son muy familiares en el campo eléctrico:

$$\frac{\partial \mathbf{s}^i}{\partial x_i} = 0$$

$$\partial (\mathbf{F}_{ik} s^k) = 0.$$

o sea:

$$\frac{\partial \mathbf{s}^i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{F}_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathbf{F}_{ik}}{\partial x_l} = 0,$$

que son las ecuaciones básicas, o fundamentales, que sirvieron como punto de partida a Mie para formar su célebre invariante L.

Adoptemos ahora el *punto de vista dinámico, mecánico, material*:

$$\mathbf{c} = \mu v^i \,.\, f_i = v^i \mathbf{p}_i \qquad \mathbf{p}_i = \mu f_i$$

$$\int_G \mathbf{c} dx = \int_G (\mu v^i \,.\, f_i)\, dx = \int_G (v^i \mathbf{p}_i)\, dx,$$

aplicando el principio de variación tenemos fácilmente:

$$\partial \int_G \mathbf{c} \,.\, dx = 0,$$

de donde:

$$\frac{\partial (\mu v^i)}{d x_i} = 0 \qquad (a)$$

$$\partial \,|\mathbf{p}_i| = \partial \,|\mu f_i| = 0 \qquad (b)$$

en que reconocemos en (a) la ecuación de continuidad de propagación material y en (b) la de conservación de acción. Esta última ecuación es la que encierra la gravitación einsteiniana, como es natural. Para poner esto en evidencia no tenemos más que aplicar las siguientes transformaciones conocidas, que no requieren mayor comentario:

$$\delta(\mu f_i) = \delta \cdot \mathbf{p}_i = \delta\left(\frac{d\mathrm{T}_i^k}{dx_k} - \Gamma_{i\beta}{}^{\alpha}\mathrm{T}_{\alpha}{}^{\beta}\right) = 0,$$

pues, se recordará que

$$\mathbf{p}_i = \frac{d\mathrm{T}_i^k}{dx_k} - \Gamma_{i\beta}{}^{\alpha}\mathrm{T}_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{d\mathrm{T}_i^k}{dx_k} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\alpha\beta}}{dx_i}\mathrm{T}^{\alpha\beta},$$

puesto que, como se sabe:

$$\Gamma_{\alpha\,.\,i\beta}\mathrm{T}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} i\beta \\ \alpha \end{bmatrix}\mathrm{T}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{dg_{\alpha\beta}}{dx_i}\mathrm{T}^{\alpha\beta},$$

donde

$$\Gamma_{i\beta}{}^{\alpha} = \left\{ \begin{matrix} i\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} = g^{\alpha r}\Gamma_{r\,.\,i\beta} = g^{\alpha r}\begin{bmatrix} i\beta \\ r \end{bmatrix}$$

son símbolos de Christoffel.

Pero la condición arriba consignada

$$\delta\left(\frac{d\mathrm{T}_i^k}{dx_k} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\alpha\beta}}{dx_i}\mathrm{T}^{\alpha\beta}\right) = 0$$

es la ecuación de conservación einsteiniana, que contiene la «divergencia por curvatura esférica». En una palabra, contiene el célebre término cosmológico que estudia Weyl.

Resumiendo, pues, tenemos:

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i f_i = v^i \mathbf{p}_i$$

y la hamiltoniana:

$$\int_G \mathbf{c} \cdot dx = \int_G (\mathbf{s}^i f_i)\, dx = \int_G (v^i \mathbf{p}_i)\, dx$$

que nos dan:

$$\text{Electricidad (teoría de Mie)} \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\mathbf{s}^i}{dx_i} = 0 \\ &\frac{d\mathbf{F}_{kl}}{dx_i} + \frac{d\mathbf{F}_{li}}{dx_k} + \frac{d\mathbf{F}_{ik}}{dx_l} = 0, \end{aligned} \right.$$

en que:

$$\frac{d\mathbf{H}^{ik}}{dx^k} = \mathbf{s}^i = \mu s^i$$

$$\mathbf{F}_{ik} = \mu\left(\frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i}\right)$$

y, por otra parte :

$$\text{Mecánica material} \begin{cases} \dfrac{d\,(\mu v^i)}{dx_i} = 0 \\ \delta \left(\dfrac{dT_i^k}{dx_k} - \dfrac{1}{2} \dfrac{dg_{\alpha\beta}}{dx_i} T^{\alpha\beta} \right) = 0 \end{cases}$$

que contiene la teoría einsteiniana de gravitación.

En otra digresión haremos la deducción de la escalar de curvatura Riemann, y del término cosmológico de Einstein partiendo del principio que un espacio arbitrario *es esférico en sus elementos infinitesimales espaciales.*

Hay que interpretar a los g_{ik} como corresponde, recordando que

$$c = s^i . f_i$$

es una propagación con aspecto de *magnitud lineal de desplazamiento.* Esto es, c es *una densidad de puntos invariantes* de *una dimensión,* o mejor, c, es una densidad unitaria invariante que representa la traza de una *repetición de puntos.*

Vemos, pues, que la solución de nuestra fenomenalidad consciente, física, reside en la sencillísima expresión de una *repetición :*

$$c = \nu . \lambda.$$

Propagación = velocidad de repetición por *cosa producida.*

CAPÍTULO VIII

El continuum

Hay una cierta propiedad en concebir un espacio de n dimensiones constituído por puntos, puesto que la definición matemática de un punto es precisamente la « ausencia de dimensiones ». Así, pues, supongamos un espacio multidimensional de puntos y elijamos un punto cualquiera. A este punto le asignamos n números arbitrarios que no tienen significado determinado alguno por el momento. Llamaremos a estos n números las « coordenadas del punto P elegido». Numerado el punto P procedemos a la numeración de los demás puntos en una forma tal que las coordenadas de un punto P′ infinitamente próximo a P difieren respectivamente de las coordenadas

del punto P en un infinitamente pequeño del mismo orden que la distancia que los separa. En esto consiste la continuidad, y por esto se denomina *continuum*. Comprendemos *ab initio* que la forma de numeración del primer punto P determina una característica del *continuum*, pero esto es sólo en apariencia, puesto que, con una transformación adecuada de coordenadas podemos hacer variar, *ad libitum*, estos números. Así que, en este espacio n dimensional la única propiedad determinada que alcanzamos a percibir es la continuidad, esta es invariante. La noción matemática así expresada es exacta, y no admite ambigüedad alguna de interpretación. Quiere decir, pues, que si adoptamos una representación numérica que llamaremos « sistema de coordenadas » (nada tiene que ver con ejes, ni vectores, etc.), podemos, mediante cualquier operación matemática continua y derivable, con derivadas también continuas, pasar del sistema de coordenadas adoptado a otro nuevo, *ad libitum*, si conocemos las formas

$$x_i = f_i\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, ..., \bar{x}_n\right) \qquad i = 1, 2, 3, ..., n$$

o ecuaciones de transformación, en que (x_i) son las coordenadas antiguas y $\left(\bar{x}_i\right)$ las nuevas siendo (f_i) las funciones de transformaciones que expresan la posición de un punto invariante en los dos sistemas de numeración.

A la forma absolutamente arbitraria de numeración coordenada continua, adoptada, suministramos, así, una especie de « mecanismo matemático » que nos permite manejar al *continuum* con una eficacia o eficiencia notable; pronto hemos de verlo. Una transformación de coordenadas representa físicamente una deformación del *continuum*, ni más ni menos.

Nuestro *continuum* tiene, pues, un carácter espacial. Cada uno de sus puntos está numerado con n coordenadas, que pueden variar *ad infinitum* mediante transformaciones simbólicamente representadas así:

$$x_i = \bar{f}_i\left(\bar{x}_k\right) = \bar{\bar{f}}_i\left(\bar{\bar{x}}_k\right), \text{ etc.} \qquad k, i = 1, 2, ..., n.$$

Podemos imaginar que estas coordenadas varían incesantemente y continuamente, por efecto de transformaciones continuas e incesantes, y de todas las maneras imaginables y posibles, que encierran como única condición invariante *la continuidad*. Así caracterizado, es lícito decir que la esencia de nuestro *continuum* es *un movimiento*. No es posible evitar la idea de movimiento. (Más aún, se nos ocurre

pensar en ciertos plasmas marinos, esos inmensos aguas-vivas, dotados de la propiedad del elemento deformativo continuo, etc.).

Definamos un movimiento, matemáticamente. Digamos sencillamente: un punto, cuyas coordenadas cambian continuamente de valor y de acuerdo con alguna ley, es un punto que se mueve. Pero el lector comprenderá inmediatamente que podemos producir este « efecto » suponiendo que el punto no se mueve y que el sistema de referencia cambia. El efecto es uno, como se ve: cambio continuo del valor numérico de las coordenadas.

Ahora se comprende el alcance admirable que tiene el concepto de un *continuum* a transformación coordenada continua *ad infinitum* para abarcar todos los fenómenos que derivan del « movimiento variado », tan difíciles de someter al régimen matemático clásico con sus espacios; planos y tridimensionalidad. Estamos en pleno campo de ideas einsteinianas.

Es evidente, como señala Einstein, que si nosotros podemos descubrir leyes matemáticas que se conservan inalterables en un *continuum* que se deforma continua e incesantemente, *ad infinitum* (formas matemáticas invariantes relativamente a transformaciones arbitrarias continuas de coordenadas), podremos declarar haber descubierto « leyes naturales del *continuum* ».

Hemos dicho que si un punto se mueve en un *continuum,* conoceremos el fenómeno por la manera que « cambian de valor numérico sus coordenadas ». También hemos indicado que este cambio de valor numérico de las coordenadas del punto puede ser producido por una transformación continua *ad hoc* del sistema de representación. Deducimos, en consecuencia, que « podemos anular el movimiento de un punto » mediante una transformación continua que altere los valores de las coordenadas en sentido opuesto a las alteraciones producidas por el movimiento. Así tendremos representado matemáticamente el fenómeno de un punto estacionario en un *continuum* deformable arbitrario. ¿ Pero cómo determinar en cada caso la ley de transformación continua, y cómo descubrir las formas matemáticas invariantes relativamente a transformaciones generales ? Este problema monumental también admite una solución relativamente sencilla. Se trata nuevamente de « una hilación de ideas matemáticas » con punto de emergencia en Leibnitz. El cálculo infinitesimal leibnitziano se fundó sobre el concepto de magnitudes infinitamente pequeñas, comparables unas con otras. Según este cálculo, toda cantidad finita se puede considerar como una integral de elementos infinitesimales que son, en el

sentido absoluto, comunes o unitarios. El *dx, dy, dz* que intervienen en el cálculo de la longitud de una curva gausa son siempre los mismos, no cambian de naturaleza, lo que cambia es la manera de usarlas, y a esta manera daremos el nombre adecuado de « fase ». Así, resulta que lo que desfigura una integración, relativamente a la sencillez de sus elementos constituyentes, es el « acoplo de una serie de circunstancias de *fase* posibles y, por lo tanto, de presencia necesaria en una fórmula global que pretende abarcar todas las posibilidades de un fenómeno o problema. ¿ Qué es lo que determina la « fase » ? La contestación es en cada caso : *circunstancias exteriores o ajenas ;* exactamente como la causa determinante de la dimensionalidad de una multiplicidad continua riemeniana, es exterior, o pertenece a « otra ciencia ». Pongamos un caso práctico de biología ; consideremos una célula y supongamos que el nucleolo se halla sostenido en el centro de figura de su habitación por medio de una serie de filamentos que representan « líneas de tensión », ya sea compresiva o de tracción. El nucleolo es tensionado en forma simétrica y, por lo tanto, está en equilibrio en su dominio espacial, etc., y ocupa el centro de figura. Aquí tenemos circunstancias iniciales que definen un estado elemental de equilibrio. Supongamos ahora que este nucleolo es iluminado de un lado con un foco de radiación cualquiera. Ya tenemos *la causa exterior*, « alteración de fase ». La desigual acción radiante en el dominio espacial del nucleolo determinará una variación de tensión en los filamentos y, en consecuencia, el nucleolo tomará movimiento dentro de su campo en demanda de una nueva posición de equilibrio, etc.

La acción externa es manifiesta. Podríamos añadir que, de acuerdo con el concepto riemeniano, la película que limita al dominio celular del nucleolo no es más que la historia en acción : « una fase de equilibrio » impuesta por acciones exteriores, sobre un campo de energía determinado.

De acuerdo con el concepto infinitesimal de Leibnitz, una línea curva se concibe engendrada por elementos infinitamente pequeños rectos, y la mecánica clásica ha apropiado el principio para explicar el movimiento variado considerando al mismo como uniforme, unidireccional, en trechos infinitesimales : traslación rectilínea uniforme. Ya vimos que una superficie gausa también puede concebirse compuesta de elementos de superficie plana infinitamente pequeños. Todo descansa sobre el postulado de la distancia elemental infinitesimal *ds*.

El principio infinitesimal de la mecánica clásica para explicar el movimiento variado es el que nos interesa especialmente. Bien sabemos que en un espacio newtoniano de cuerpos libres, el movimiento característico es el de traslación rectilínea uniforme, y que en este espacio alteramos la dirección de una traslación uniforme, y la velocidad constante de la misma, por medio de transformaciones lineales de coordenadas. Resulta de esto que si el movimiento variado puede reducirse a uno de traslación uniforme mediante una reducción al infinitamente pequeño, podemos aplicar el procedimiento a nuestro *continuum* y considerar el movimiento infinitesimalmente. Este procedimiento ha recibido el nombre de « linealización » y es de una fecundidad admirable.

Supongamos que $P = (x_i)$ es un punto del *continuum* y que

$$x_i = f_i\left(\bar{x}_k\right) \qquad k, i = 1, 2, ..., n$$

son las ecuaciones de transformaciones a otro sistema coordenado arbitrario. Consideremos ahora un punto P' vecino a P tal que

$$P' = (x_i + dx_i),$$

los dx_i serán coordenadas relativas de P' respecto a P. Si transformamos, como $\overline{PP'}$ es invariante resulta

$$dx_i = \frac{df_i}{d\bar{x}_1} d\bar{x}_1 + \frac{df_i}{d\bar{x}_2} d\bar{x}_2 + \ \ldots \ + \frac{df_i}{d\bar{x}_n} d\bar{x}_n = \sum_k^n \frac{df_i}{d\bar{x}_k} d\bar{x}_k$$

y si los $\left(\bar{\bar{x}}_i\right)$ representan otra transformación, tenemos manifiestamente

$$dx_i = \sum_k^n \frac{df_i}{d\bar{x}_k} d\bar{x}_k = \sum_k^n \frac{d\bar{f}_i}{dx_k} \cdot d\bar{\bar{x}}_k = \ \ldots, \text{ etc.},$$

que son formas lineales. Estamos, pues, en pleno terreno de transformaciones lineales y si hacemos la sustitución

$$\alpha_k^i = \frac{df_i}{d\bar{x}_k}; \qquad \bar{\alpha}_k^i = \frac{d\bar{f}_i}{d\bar{\bar{x}}_k}, \text{ etc.},$$

tendremos

$$dx_i = \alpha_k^i dx_k = \bar{\alpha}_k^i d\bar{\bar{x}}_k = \text{etc.},$$

sobreentendiendo el signo de suma $\sum$.

El lector se dará cuenta ahora de lo siguiente, que no es más que la expresión en lenguaje analítico-matemático de lo ya observado, es de-

cir: pasando del infinitamente pequeño en el *continuum* a transformaciones absolutamente arbitrarias de coordenadas corresponden transformaciones lineales infinitesimales. De manera que formas invariantes en el infinitamente pequeño relativamente a transformaciones lineales son formas absolutamente invariantes relativamente a transformaciones arbitrarias de coordenadas del *continuum*. Aquí, pues, tenemos evidenciado « el poder de la linealización » como instrumento de análisis. Todavía más, reconocemos la correspondencia exacta que existe entre este resultado matemático y el mecánico que nos dice que cualquier movimiento puede reducirse a traslación rectilínea uniforme pasando a trechos o elementos infinitesimales de trayectoria, y así decimos que en estos trechos el cuerpo se comporta libremente, a lo cual, *a fortiori,* tendrá que corresponder un elemento infinitesimal espacial newtoniano, o sea : espacio libre = espacio plano euclideano afín! El encadenamiento lógico es completo y perfecto; se trata de una « unidad harmónica ». La idea de Leibnitz lo enhebra todo, es decir : que las magnitudes están caracterizadas por « órdenes »; aquello que Euclides formuló para el orden finito se mantiene exacto en las generalizaciones si pasamos al orden inmediato infinitamente pequeño.

Se descubre ahora la posibilidad de desarrollar un cálculo tensorial en el *continuum.* No tenemos más que elegir un punto P como « punto de emergencia » y considerar desplazamientos infinitesimales $\overline{PP'}$ (siempre unido al punto P) adoptando en P un sistema vectorial convencional unitario básico $(e_1, e_2, ..., e_n)$. Nada más. Los tensores son ahora tensores en P. Estos vectores básicos corresponden en un todo a los conocidos del espacio plano euclideano afín. Hay una circunstancia que más adelante estudiaremos en detalle, y se relaciona con la conexión métrica del *continuum.* Esto es, adoptado el sistema básico vectorial en P, o sea $(e_1, e_2, ..., e_n)$, y transformando a otro sistema $(e_1\ e_2, ..., e_n)$ mediante una rotación guiada por la matriz A de componentes (a_k^i), el cuerpo vectorial infinitesimal en P no experimentará alteración métrica si la determinante de los (a^i), o sea $|a_k^i| = 1$. No es necesario que esta determinante sea igual a uno, pero sí es necesario que sea igual a una constante, o que sea constante. Como el lector puede ver, esta circunstancia encierra una condición de *densidad invariable.* Quiere decir, que si llamamos (ξ^i) las componentes infinitesimales de un desplazamiento infinitamente pequeño PP′ en P, y si (e_i) son los vectores básicos del sistema en P, tendremos como antes :

$$\overline{\mathrm{PP}'} = \mathrm{X} = \sum_i^n \xi^i e_i,$$

si transformamos con una rotación A (α_k^i) será:

$$\bar{e}_i = \sum_k^n \alpha_k^i \bar{\xi}^k; \qquad \bar{\xi}_i = \sum_k^n \alpha_i^k \xi_k; \qquad \xi^i = \sum_k^n \alpha_k^i \bar{\xi}^k;$$

y como se sabe:

$$\alpha_k^i = \frac{df_i}{d\bar{x}_k}; \qquad \mathrm{P} = (x_i); \qquad x_i = f_i\left(\bar{x}_k\right);$$

en que

$$k, i = 1, 2, ..., n.$$

Los valores de α_k^i siempre se refieren al punto P. Un tensor en P es, pues, una forma multilineal infinitesimal, en que las variables o componentes de los vectores infinitesimales se transforman por lineales, directas o recíprocas, en forma cogrediente o contragrediente, relativamente a los vectores básicos (e_i). Exactamente como hemos visto en el espacio plano afín. La única diferencia es que ahora los tensores se refieren a un punto P de emergencia, es decir, estamos reducidos a un elemento infinitesimal de espacio en P. Los coeficientes de estas formas invariantes son los componentes del tensor, etc. Todos los desplazamientos o vectores infinitesimales cuyas componentes figurán en estas formas tensoriales arrancan de P.

Otra particularidad del *continuum* es que ya no podemos comparar desplazamientos infinitesimales entre sí excepto cuando poseen un mismo punto P de emergencia. Así, pues, no tiene sentido hablar de magnitudes iguales en este espacio excepto cuando éstos son infinitesimales y arrancan de un mismo punto. Matemáticamente, si desplazamos un elemento infinitesimal dx de P a P′, infinitamente próximo, habrá experimentado un $\delta \,.\, dx$ cuando haya llegado a P′ y si se vuelve otra vez a P será un $\delta' \,.\, \delta \,.\, dx$ y no necesariamente dx, dependiendo estas variaciones de los caminos seguidos de P a P′ y de P′ a P. Quiere decir que, solamente en un punto P admitimos una conexión métrica invariable y esta condición es la que dió origen a la condición de transformación ya enunciada.

Dos traslaciones infinitesimales en P (δx_i) y (dx_i), dan origen a un elemento superficial, o un elemento lineal de segundo orden, o sea:

$$dx_i \,.\, \delta x_k - \delta x_i dx_k = \Delta x_{ik},$$

y tres desplazamientos originan un elemento lineal de tercer orden que podemos escribir Δx_{ikl}, etc. Estos valores son invariantes como

se ve, pues, se componen de elementos invariantes, así que tenemos, *ipso facto,* definido los tensores lineales en P, o sea, covariantes levosimétricos.

Antes de seguir adelante tenemos que hacer notar y establecer que una transformación arbitraria de coordenadas en el *continuum* se tratraduce en una rotación del sistema vectorial infinitesimal (e_i) en P, guiada por una matriz A, por ejemplo :

$$x_i = f_i(\bar{x}_k), \qquad \alpha_k^i = \frac{df_i}{d\bar{x}_k}, \qquad \bar{e}_i = \alpha_i^k e_k.$$

Si suponemos ahora transformado el *continuum* en todas las múltiples infinitas maneras continuas posibles, obtendremos en P una rotación continua, múltiple también por *invariación de densidad*, que tendría representación por un número correspondiente de matrices. Estas matrices forman un grupo continuo, esto es, constituyen elementos de un *continuum* de matrices a n dimensiones.

Es fácil ver, matemáticamente, el carácter múltiple de la continuidad grupal. Por ejemplo, eligiendo un punto P con un sistema (e_i) unitario básico, establezcamos una correspondencia afín, en este sistema, valiéndonos del cuerpo de vectores en P. Sea A la matriz de correspondencia afín, de componentes (α_k^i). Ahora transformemos al *continuum,* lo cual determina una matriz de rotación U en P; evidentemente que el efecto será una transformación de A por U. Formemos la rotación conjugada

$$\mathrm{UAU}^{-1}$$

y percibiremos el carácter múltiple grupal inmediatamente. Si A es un elemento de un grupo de transformaciones afines, y U un elemento de rotaciones, con hacer recorrer a A todos los valores del grupo y a U todos los valores, a su vez, del grupo de rotaciones, obtenemos nuevos grupos, *ad infinitum.* Fácil es reconocer que todos estos grupos son de una misma especie, o que difieren del grupo A, por ejemplo, por orientación. Volveremos nuevamente sobre este punto cuando consideramos la conexión métrica del *continuum.*

Para concebir una dimensionalización en el *continuum* tenemos forzosamente que valernos de parámetros, como quien dice de acciones extrañas. Por ejemplo, una línea, como espacio unidimensional, resulta de una « densificación » guiada por un parámetro r, que obedece una ley cualquiera determinada, o sea :

$$\mathrm{P} = (x_i), \qquad \chi_i = \varphi_i(r), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Cada valor de r produce un punto P y la variación continua de r engendra una línea en el *continuum*. Dos parámetros nos permiten engendrar una superficie a dos dimensiones y así sucesivamente. Si r es una acción que depende del tiempo podríamos interpretar la densificación como un movimiento, sin perder de vista que la esencia de una densificación es un movimiento, o bien, una densificación es posible únicamente donde es posible un movimiento o existe posibilidad de movimiento. Nosotros estamos acostumbrados a interpretar esta acción paramétrica en el solo sentido de movimiento y de llamar trayectoria a la representación gráfica de su historia o pasado. Si recordamos lo dicho acerca del fenómeno llamado « movimiento », podemos sentar que una densificación es la historia de una acción, posible solamente en un dominio espacial-temporal. Pero esto no basta como definición, puesto que nos produce intelectualmente una diferenciación entre dimensiones que es errónea. Quiere decir, simplemente, que así como Einstein nos ha demostrado ser imposible distinguir entre los sistemas cartesianos de representación en un espacio newtoniano libre, así también es imposible distinguir un punto de otro punto en el *continuum*. ¿ Cómo será, por ejemplo, posible distinguir en un *continuum* plano de dos dimensiones, o sea un plano de puntos, una línea de puntos del resto de los puntos en el plano? De una sola y absolutamente única manera, es decir, densificando la línea. Esto exige como condición indispensable, necesaria, la posibilidad de movimiento en el plano y esta posibilidad exige, a su vez, una acción temporal extraña al plano que obra sobre sus elementos constituyentes o puntos en cierta forma determinada, dejando, como historia o pasado, la línea. Tenemos percepción del proceso de densificación, en acción, o sea presente activo por los fenómenos que englobamos en el término « evolución », pero de aquí no pasamos.

Todo esto nos obligaría a entrar en consideraciones sobre la disposición de los puntos en un *continuum;* problema que parece trascender a nuestros alcances humanos, como diría Locke, cuya filosófica reflexión del tiene especial aplicación en este caso.

El vector en P determinado por las componentes $\frac{dx_i}{dr} = u^i$ tiene aspecto de velocidad y es de gran importancia; consiste, como sabemos, del desplazamiento infinitesimal $\overline{PP'}$ de dos posiciones consecutivas de P en la trayectoria, multiplicado por el número o escalar $\left(\frac{1}{dr}\right)$.

Fácilmente pasamos de una a dos velocidades

$$\frac{dx_i}{dr}, \qquad \frac{dx_i}{ds}, \quad \text{etc.}$$

El análisis tensorial en el *continuum* presenta dificultades y está limitado a los tensores lineales. Esto resulta del hecho de que debemos ceñirnos a un punto de emergencia, de suerte que un campo tensorial de una especie determinada implica el conocimiento de los tensores en cada punto P de un dominio o fracción de *continuum.* Los componentes de un tensor son funciones de las coordenadas del punto, y, en el caso de un espacio afín euclideano, la invariación respecto a transformaciones lineales nos permitía elegir, *ad libitum*, los vectores o desplazamientos con componentes independientes de la posición o del lugar (punto), de manera que el análisis se resumía en una diferenciación directa del tensor, sus componentes, se entiende. Ahora no.

Una transformación arbitraria del *continuum* produce una rotación A en P de componentes (α_k^i) y éstos ya no son constantes, sino en el punto P, esto es, los (α_k^i) varían de P a P′; he ahí la dificultad. Se ve, pues, que solamente podemos operar con formas tensoriales lineales con punto de emergencia en P. De acuerdo con el principio de Weyl, no podemos desplazar distancias en el *continuum.* Repetimos, entonces, que en el *continuum* el análisis tensorial queda restríngido a tensores lineales en P.

Evidentemente, los componentes de un campo tensorial en el *continuum* son funciones de las coordenadas (x_i) del punto P, que se suponen continuas y derivables con derivadas continuas, etc. Así, pues, de un campo escalar (tensorial cero) derivamos un campo tensorial lineal de primer orden, y así sucesivamente.

De $\varphi = f(x_i)$ obtenemos :

$$f_i = \frac{df}{dx_i};$$

de $f_i = \dfrac{df}{dx_i}$ obtenemos :

$$f_{ik} = \frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i};$$

de f_{ik} obtenemos :

$$f_{ikl} = \frac{df_{kl}}{dx_i} + \frac{df_{li}}{dx_k} + \frac{df_{ik}}{dx_l}; \quad \text{etc.}$$

Tomemos el primer caso de $f^i = \frac{df}{dx_i}$; se basa sobre la invariación de la operación *grad* vectorial, como se ve :

$$\varphi = f(x_i) = \bar{f}(\bar{x}_i) = \bar{\bar{f}}(\bar{\bar{x}}_i)$$

$$d\varphi = \sum_i^n \frac{df}{dx_i} dx_i = \sum_i^n \frac{d\bar{f}}{d\bar{x}_i} d\bar{x}_i = \ldots$$

en que aparecen los $\left(\frac{df}{dx_i}\right)$ como componentes de un campo lineal de primer orden, etc., que corresponde al escalar φ por la operación invariante *grad.* que vemos es invariante general.

Obtenida f_i de φ por la operación *grad.* podemos ascender al f_{ik} calculando la variación que experimenta f_i por un doble transporte infinitesimal de componentes (dx_i) y (δx_i).

Si (dx_i) y (δx_i) son, respectivamente, dos elementos lineales en P, la variación producida en $(f_i dx_i)$ por el desplazamiento del punto P a lo largo de estos dos elementos será :

$$(\delta f_i \,.\, dx_i + f_i \delta dx_i) - (df_i \delta x_i + f_i d\delta x_i) =$$
$$= (\delta f_i dx_i) - (df_i \delta x_i) + f_i (\delta dx_i - d\delta x_i),$$

fácil es ver que el segundo paréntesis es nulo y despreciable por ser de orden superior de infinitesimal pequeño, quedando :

$$\delta f_i \,.\, dx_i - df_i \delta x_i = \left(\frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i}\right) dx_i \delta x_k$$

en que se suple el δ con otro índice, etc. Así, pues :

$$f_{ik} = \frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i},$$

o si se quiere

$$\Delta f = \Delta\varphi = (d \,.\, \delta\varphi - \delta \,.\, d\varphi) = f_{ik} dx_i \delta x_k,$$

que es un tensor lineal de segundo orden de componentes

$$f_{ik} = \frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i}.$$

Para demostrar que

$$(\Delta \,.\, dx) = (d\delta x_i - \delta dx_i) = 0$$

no hay más que considerar el paralelogramo de vértices en orden cíclico $P_0 P_{01} P_{11} P_{10} P_0$.

Desplazando a P_0 hasta P_{11} por los dos caminos posibles, vemos que la variación puede expresarse como sigue:

$$d\,.\,\delta x_i = \{ P_{11}(x_i) - P_{01}(x_i) \} - \{ P_{10}(x_i) - P_0(x_i) \}$$
$$\delta\,.\,dx_i = \{ P_{11}'(x_i) - P_{10}(x_i) \} - \{ P_{01}(x_i) - P_0(x_i) \}$$
$$d\,.\,\delta x_i - \delta dx_i = P_{11}(x_i) - P_{11}'(x_i) = 0$$

en que reconocemos la condición que $P_0 P_{10} P_{11} P_{01}$ forme un paralelogramo infinitesimal, cuya condición postulamos llenada con menos error que un infinitamente pequeño de orden mayor que el primero.

Resumiendo, pues: de la invariante

$$df = f_i dx_i$$

obtenemos el campo lineal de segundo orden

$$\Delta f = \left(\frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i}\right) dx_i \delta x_k = f_{ik} dx_i \delta x_k,$$

que es derivado del campo de primer orden y relacionado con el mismo en forma absolutamente invariante. Hay otro método de llegar a este resultado y consiste en concebir una superficie arbitraria definida por dos parámetros (r, s) sobre el cual se halla el punto P. Suponiendo que esta superficie es reticulada por las curvas r y s, podemos imaginar una posición determinada P_0 y considerar un campo tensorial lineal de primer orden en P_0 definido por la invariante $df = f_i dx_i$; en seguida desplazando a P_0 a lo largo del perímetro de un paralelogramo infinitesimal. Este desplazamiento podemos conceptuarlo producido por dos velocidades de componentes u^i y v^i en P_0, esto es:

$$P = (x_i); \qquad x_i = \varphi_i(rs)$$
$$\left(\frac{dx_i}{dr}\right)_{P_0} = u^i; \qquad \left(\frac{dx_i}{ds}\right)_{P_0} = v^i;$$

y suponer que $r = o$, $s = o$ en P_0 para mayor sencillez.

Tendremos, entonces, como puede verse y sin necesidad de más explicación, simbolizando d y δ diferenciación relativamente a r y s respectivamente:

$$\frac{df}{dr} = df = f_i \frac{dx_i}{dr}; \qquad \delta\,.\,df = \frac{df_i}{dx_k} \cdot \frac{\delta x_k}{ds} \cdot \frac{dx_i}{dr} + f_i \frac{d^2 x_i}{drds};$$
$$\frac{\delta f}{\delta s} = \delta f = f_k \frac{\delta x_k}{\delta s}; \qquad d\,.\,\delta f = \frac{df_k}{dx_i} \cdot \frac{dx_i}{dr} \cdot \frac{\delta x_k}{\delta s} + f_i \frac{d^2 x_i}{drds};$$
$$\Delta f = \delta df - d\delta f = \left(\frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i}\right) \frac{dx_i}{dr} \cdot \frac{\delta x_k}{ds};$$

y pasando al punto P_0 tenemos :

$$\Delta f = \left(\frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i}\right) u^i v^k,$$

que es una invariante que depende de dos vectores arbitrarios u y v en P. La relación entre este método y el anterior está a la vista.

Recordemos el admirable teorema de Stokes y apliquémoslo al caso de análisis recién estudiado. Según ese teorema la invariante diferencial $f_i dx_i$ se dice *integrable* si la integral tomada a lo largo de cualquier curva cerrada es nula, es decir, si su rotación es $= 0$, que es la condición general de una diferencial total exacta, como se sabe. Supongamos, pues, una superficie arbitraria paramétrica definida por $x_i = \varphi_i\ (rs)$ que contenga a la curva cerrada a lo largo de la cual se integra $f_i dx_i$, y dividamos, por medio de una reticulación infinitesimal de líneas coordenadas, el área encerrada sobre esta superficie por la curva. Entonces podemos substituir el transporte perimetral a lo largo de la curva cerrada por la suma de las rotaciones tomadas al rededor de cada uno de los paralelogramos reticulares que componen el área comprendida por la misma sobre la superficie. En otras palabras, descubrimos que el tensor lineal hallado, o sea :

$$\Delta f = f_{ik} u^i v^k = \left(\frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i}\right) u^i v^k$$

es precisamente el valor unitario de estas rotaciones elementales, multiplicado por $u^i v^k$, y deducimos, en consecuencia, que

$$\frac{df_i}{dx_k} - \frac{df_k}{dx_i} = f_{ik}$$

mide la intensidad de rotación en el punto P_0, como si dijéramos : la rotación por unidad de área en este punto.

Por un método completamente análogo deducimos el tensor lineal, o campo tensorial lineal de tercer orden, del de segundo orden; queda como ejercicio para el lector. Se obtiene

$$f_{ikl} = \frac{df_{kl}}{dx_i} + \frac{df_{li}}{dx_k} + \frac{df_{ik}}{dx_l}.$$

De este análisis hemos deducido una propiedad de la mayor importancia que es preciso recordar, es decir : que los tensores lineales tienen *aspecto de una intensidad,* o, si se quiere, *miden una magnitud de intensidad.*

Consideremos ahora la invariante integral

$$\int \mathbf{w} dx \qquad dx = dx_1 . dx_2 \ . \ . \ . \ dx_n$$

si transformamos el sistema coordenado, es evidente que **w** tendrá que ser una magnitud que depende del sistema coordenado, de tal manera, que la transformación tendrá como único efecto multiplicarla por un factor constante, es decir, el valor absoluto de la jacobiana de transformación. Si concebimos que **w** representa una magnitud de cantidad de alguna cosa (una substancia) y si comprendemos por dx un elemento volumétrico multidimensional, la integral representará una masa. Quiere decir que **w** es una densidad escalar, y así la llamaremos siempre.

Podemos extender este concepto a los tensores de la manera siguiente: llamaremos densidad tensorial a todo tensor cuyos componentes, cuando se transforman coordenadas, resultan multiplicados por el valor absoluto de la determinante de « rotación », así:

$$|\alpha_k{}^i|$$

las variables transformándose como de costumbre, esto es:

$$\xi^i = \sum_k \alpha_k{}^i \bar{\xi}; \qquad \bar{\xi}_i = \sum_k^n \alpha_i{}^k \xi_k.$$

Percibimos inmediatamente que bastará multiplicar a cualquier tensor por una densidad escalar (**w**) para obtener una densidad tensorial del mismo orden que el tensor. Y, en general, vemos que el producto de cualquier densidad tensorial por un tensor producirá una densidad tensorial de un orden igual a la suma de los órdenes de los factores, como en la multiplicación de tensores. También está a la vista que el producto de dos densidades escalares no puede ser una densidad tensorial — una transformación lo demuestra.

Weyl recalca la importancia de la distinción entre tensores y densidades tensoriales; efectivamente, es de una importancia trascendental física. Hemos logrado establecer, matemáticamente, una diferencia marcada entre tensores como magnitudes de intensidad, y densidades tensoriales como magnitudes de cantidad.

Mas aún: las densidades tensoriales contravariantes, levo-simétricas, desempeñan el mismo rol, entre las demás densidades tensoriales, que los tensores covariantes, levo-simétricos, desempeñan entre los tensores en general. Por esta razón, y por analogía, llamaremos « densidades tensoriales lineales » a aquellas densidades que son *contravariantes y levo-simétricas.*

El álgebra de estas densidades es idéntica a la conocida para tensores en general : adición de densidades de una misma especie, multiplicación, contracción de índices, etc. Refiriéndose la multiplicación a dos factores, es decir, uno tensor y el otro densidad tensorial y no teniendo significado el producto de dos densidades, etc., distinguiremos las densidades por letras especiales.

El análisis de densidades tensoriales en el *continuum* general sólo es posible en el caso de densidades tensoriales lineales. Se resume en un procedimiento de divergencia, en el concepto vectorial de esta palabra. Esto era de esperarse, puesto que hemos visto que estas densidades miden magnitudes de cantidad, teniendo una divergencia aspecto de una dilatación.

Encontramos que :

$$\frac{d\mathsf{w}^i}{dx_i} = \mathsf{w}$$

$$\frac{d\mathsf{w}^{ik}}{dx_k} = \mathsf{w}^i$$

$$\frac{d\mathsf{w}^{ikl}}{dx_l} = \mathsf{w}^{ik}, \text{ etc.}$$

Empezaremos por demostrar que w es una densidad escalar. Muy sencillamente ; no tenemos más que formular la expresión de la variación que experimenta una cantidad de substancia en un dominio G dado, por efecto de una deformación del *continuum* que convierte al dominio G en $\bar{G}$ infinitamente poco diferente. Esto se consigue llamando S (x) una escalar de densidad, o sea una cantidad de substancia por unidad volumétrica n dimensional. Así, $\int_G S(x) \, . \, dx$ es la cantidad contenida en G.

Si ahora deformamos, infinitesimalmente, al *continuum* de manera que :

$$\bar{x}_i = x_i + \xi^i \, . \, dt$$

en que (ξ^i) es el vector de deformación y dt el parámetro infinitesimal director de la deformación — el tiempo, — sabemos que un volumen elemental dV sufre variación :

$$d\bar{V} = dV\,(1 + A) \qquad A = \frac{d\xi^i}{dx_i} \cdot dt,$$

fácil es ver que

$$d\bar{V} = \left| \frac{d\bar{x}_i}{dx_k} \right|$$

es la jacobiana de transformación y que A es la dilatación volumétrica, igual a la divergencia, etc. Si pues:

$S(x_i)$ se convierte en $S(\bar{x}_i)$;

dx se convierte en $d\bar{x}$, siendo $dx = dx_1 . dx_2, \ldots$

G se convierte en $\bar{G}$.

La deformación entraña la variación de

$$\int_G S(x_i)\,dx \qquad \text{a} \qquad \int_{\bar{G}} S(\bar{x}_i)\,d\bar{x}$$

esto es:

$$\int_{\bar{G}} S(\bar{x}_i)\,d\bar{x} = \int_{\bar{G}} S(\bar{x}_i) . (1 + A)\,dx,$$

o con error de orden superior de infinito pequeño tomando límite G:

$$\int_G S(\bar{x}_i)(1 + A)\,dx$$

la variación es, pues:

$$\int_G S(\bar{x}_i)(1 + A)\,dx - \int_G S(x_i)\,dx = \int_G \left\{ S(\bar{x}_i)(1 + A) - S(x_i) \right\} dx$$

reduciendo se tiene con facilidad:

$$S(\bar{x}_i) = S(x_i + \xi^i dt) = S(x_i) + \frac{d(S)}{dx_i} \cdot \xi^i dt$$

$$\int_G S(\bar{x}_i)\,A . dx = \int_G \left\{ S(x^i) + \frac{dS}{dx_i} \xi^i dt \right\} \frac{d\xi^i}{dx_i} \cdot dt . dx$$

y de aquí una $S(x_i)$ se destruye por

$$\text{variación} = \int_G \left\{ S \cdot \frac{d\xi^i}{dx_i} \cdot dt + \frac{dS}{dx_i} \cdot \xi^i dt + \left(\frac{dS}{dx_i} \cdot \frac{d\xi^i}{dx_i} \cdot \xi^i dt^2 \right) \right\} dx$$

y descartando infinitamente pequeños de orden superior

$$= \int_G \frac{d(S . \xi^i)}{dx_i}\,dt . dx,$$

quiere decir que

$$\frac{d(S . \xi^i)}{dx_i} \cdot dt$$

es una magnitud escalar de cantidad regulada por el parámetro dt:

$$\frac{d(S . \xi^i)}{dx_i}$$

es pues una *densidad escalar invariante*

$$\frac{d(S\xi^i)}{dx_i} = \mathbf{w} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{w}^i = S\xi^i:$$

para una $S = 1$, etc., el significado es manifiesto y no requiere mayor comentario.

$\mathbf{w}^i = S\xi^i$ responde a nuestra definición de densidades tensoriales que dice : ser el producto de una densidad escalar por un vector, o tensor, igual a una densidad tensorial de primer orden. Tomando, pues, a $S = 1$ resulta $\mathbf{w}^i = \xi^i$, y ya sabemos que podemos hallar un sistema coordenado en el cual $S = 1$, de suerte que $\mathbf{w}^i = \xi^i$ será válido en cualquier sistema coordenado por invariación. Esto implica un factor constante, etc.

Resultando que una densidad tensorial de primer orden $\mathbf{w}^i$ puede siempre ser elegida, de manera que $\mathbf{w}^i = S \,.\, \xi^i$, en que $S(x_i)$ es una densidad escalar y (ξ^i) las componentes de un campo vectorial contravariante. Así, pues, remontamos en el análisis, o sea :

$$\frac{d\mathbf{w}^i}{dx_i} = \mathbf{w},$$

eligiendo un campo covariante en P :

$$\frac{d\mathbf{w}^{ik}}{dx_k} = \frac{d\,.\,(f_i\mathbf{w}^{ik})}{dx_k} = f_i\,\frac{d\,.\,\mathbf{w}^{ik}}{dx_k} = f_i\mathbf{w}^i$$

en que basta tomar $f_i = 1$ y tenemos

$$\frac{d\mathbf{w}^{ik}}{dx_k} = \mathbf{w}^i.$$

f_i es un campo vectorial covariante derivado de un potencial f.

Muy fácil es ahora demostrar el siguiente teorema de cálculo integral que es de importancia. Si se tiene

$$\int_G \frac{d\mathbf{w}^i}{dx_i}\,dx$$

y si las funciones $\mathbf{w}^i$ son tales que se anulan en los límites del dominio de integración será

$$\int_G \frac{d\mathbf{w}^i}{dx_i}\,dx = 0.$$

Esto es evidente, puesto que, analíticamente:

$$\int_G \frac{d\mathbf{w}^i}{dx_i} dt \,.\, dx = \int_G dt \cdot \frac{d\,.\,(S\xi^i)}{dx_i} dx = \int_G \left\{ S \frac{d\xi^i}{dx_i} + \xi^i \frac{dS}{dx_i} \right\} dt dx$$

$$= \left[S\xi^i \right]_G - \int_G \xi^i \frac{dS}{dx_i} dt \,.\, dx + \int_G \xi^i \frac{dS}{dx_i} dt \,.\, dx = \left[S\xi^i \right]_G$$

y como los $\mathbf{w}^i$ se anulan en los límites, resulta:

$$\int_G \frac{d\mathbf{w}^i}{dx_i} dt dx = 0$$

o sea

$$\int_G \frac{d\mathbf{w}^i}{dx_i} dx = 0.$$

Aquí deducimos que la integral de una divergencia, cuyas funciones se anulan en los límites de la integración, es cero. Este es el principio tensorial de integración por partes.

Se remonta a

$$\frac{d\mathbf{w}^{ikl}}{dx_l} = \mathbf{w}^{ik}$$

$$\frac{d\mathbf{w}^{ikl}}{dx_l} = \frac{d\,(f_{ik}\mathbf{w}^{ikl})}{dx_l} = f_{ik} \frac{d\mathbf{w}^{ikl}}{dx_l} = f_{ik}\mathbf{w}^{ik}, \text{ etc.}$$

CAPÍTULO VIII

La conexión afín. Curvatura vectorial

Llegamos al concepto magistral de Levi-Civita del transporte infinitesimal paralelo.

Diremos que el *continuum* posee conexión afín, sí transportando, por pura traslación paralela, el cuerpo de vectores infinitesimales en P al punto inmediato infinitamente próximo P′, podemos establecer una conexión afín entre los vectores en P y los correspondientes en P′; en otras palabras, si podemos descubrir una matriz de transformación lineal que aplicada al cuerpo vectorial en P produce el cuerpo vectorial en P′. Quiere decir, que es posible una traslación pura, congruente, infinitesimal vectorial entre P y P′. Convertir esta correspondencia afín en una igualdad es simple cuestión de una transformación adecuada de coordenadas del *continuum* que determi-

ne una rotación conveniente de los (e_i) básicos en P. Se puede, pues, sentar que, existiendo conexión afín en el *continuum* será posible elegir un sistema de coordenadas para P y su vecindad inmediata, infinitamente próxima, tal que los componentes de los vectores en P no experimenten alteración alguna por efecto de transporte paralelo a P', infinitamente vecino. Siendo esto exacto para cualquier P', podríamos decir que deja sin alteración los componentes de un vector cualquiera en P después de un desplazamiento paralelo infinitesimal arbitrario. Este sistema de coordenadas se denomina geodésico en P. Se trata de una « propagación paralela » infinitesimal.

Vemos claramente, en consecuencia, que podemos, mediante una elección sucesiva de sistemas geodésicos, primero en P, después en P', después en P'', etc., *ad libitum,* trasportar, por puras traslaciones paralelas, un vector determinado infinitesimal en P, desde P a otro punto del *continuum,* sin que experimente variación. Si el vector en P representa *la velocidad* del movimiento traslatorio paralelo, vemos que el punto P se moverá en el sistema constantemente *geodésico,* como si fuera libre : con velocidad y dirección constantes. En otras palabras, sometemos al *continuum* a una deformación continua que corrige la variación (aceleración) en el movimiento del punto P, es decir, anula la aceleración. Si podemos anular la aceleración podemos anular la fuerza, dinámicamente considerada. Efectivamente, y es así que el lector podrá explicar la situación de los pasajeros en un ascensor que se desploma, sin fricción ni resistencias, desde una gran altura imaginaria por haberse cortado la cuerda ; los pasajeros existen en un *espacio libre newtoniano* dentro del ascensor, constituyendo éste un sistema estacionario geodésico. El sistema geodésico estacionario anula la acción de gravitación. La inmensa importancia de estos sistemas geodésicos aparece cuando se estudia la nueva ley de gravitación de Einstein en la teoría general del relativismo.

Vamos a expresar matemáticamente este concepto de Levi-Civita. *Postulamos* que la variación que produce el transporte infinitesimal paralelo de un vector de P a P' inmediato es del mismo orden que la traslación, y por lo tanto, la matriz de transformación será infinitesimal : si (ξ^i) son las componentes en el sistema (e_i) en P de un vector infinitesimal, entonces en P' este vector tendrá componentes alterados en

$$d\xi^i = -\sum_r^n d\gamma_r{}^i \xi^r$$

en que el signo (—) resulta cómodo para los fines que perseguimos ; la

matriz G debe ser infinitesimal y del mismo orden que la traslación. Esto nos obliga a imponer la condición:

$$d\gamma_r{}^i = \Gamma_{rs}{}^i dx_s,$$

debiendo además cumplirse la condición de simetría

$$\Gamma_{rs}{}^i = \Gamma_{sr}{}^i.$$

Entendiéndose siempre que estas variaciones tienen lugar en el sistema vectorial original en P de los (e_i) unitarios.

Ahora bien, si transformamos las coordenadas del *continuum*

$$P = (x_i), \qquad x_i = f_i(\bar{x}_k), \qquad i, k = 1, 2, 3, ..., n,$$

esta transformación determinará una rotación de los (e_i) en P. Resulta, pues, que descubrimos una posibilidad de transformar los (x_i) en $(\bar{x}_i)$ de manera que se produzca una rotación de (e_i) en P tal que los $\Gamma_{rs}{}^i = 0$ y el transporte paralelo infinitesimal es sin variación. El lector observará fácilmente la relación que existe entre estas magnitudes en P, como ser los (dx_i) que son coordenadas relativas a P de un punto vecino, y que todo vector infinitesimal no es sino el $\overline{PP'}$ determinado por dos puntos: el primero, origen, P, y el segundo el de coordenadas (dx_i), etc. Este $\overline{PP'}$ es el vector de componentes (ξ^i) en el sistema (Pe_i) vectorial unitario. Cuando convertimos (dx_i) en $(d\bar{x}_i)$ se transformará (ξ^i) en $(\bar{\xi}^i)$ por efecto de la rotación de los (e_i). El problema, pues, consiste en hallar una matriz que convierta la clase de la conexión afín definida por los Γ en congruencia, que equivale a decir $\Gamma = 0$.

Una rotación definida por la matriz A haría que:

$$\xi^i = \alpha_k{}^i \bar{\xi}^k \qquad \text{y} \qquad \bar{\xi}_i = \alpha_i{}^k \xi_k,$$

si esta rotación es producida por una transformación que convierte los (x_i) en $(\bar{x}_i)$ y los $\bar{x}$ son coordenadas de un sistema geodésico en P, deberá tenerse:

$$d\xi^i = d\left(\alpha_k{}^i \bar{\xi}^k\right) = \bar{\xi}^k \,.\, d\alpha_k{}^i,$$

pues los $(\bar{\xi}^k)$ no varían. Como

$$\alpha_k{}^i = \frac{df_i}{d\bar{x}_k}; \qquad d\alpha_k{}^i = \frac{d}{d\bar{x}_r}\left(\frac{df_i}{d\bar{x}_k}\right) d\bar{x}_r = \frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_r \,.\, d\bar{x}_k} d\bar{x}_r:$$

$$d\xi^i = \frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_r \,.\, d\bar{x}_k} \bar{\xi}^k \,.\, d\bar{x}_r = - d\gamma_r{}^i \xi^r = - \Gamma_{rk}{}^i \xi^r \,.\, dx_k,$$

el encadenamiento es perfecto. Resumiendo:

$$d\xi^i = - d\gamma_r{}^i \xi^r; \qquad d\gamma_r{}^i = \Gamma_{rs}{}^i dx_s;$$

y de aquí

$$d\xi^i = - \Gamma_{rs}{}^i \xi^r dx_s$$

$$\xi^i = \alpha_r{}^i \bar{\xi}^r; \qquad d\xi^i = \bar{\xi}^r \,.\, d\alpha_r{}^i = \frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_r d\bar{x}_s} \bar{\xi}^r d\bar{x}_s;$$

$$d\xi^i = \frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_r d\bar{x}_s} \cdot \bar{\xi}^r \,.\, d\bar{x}_s = - \Gamma_{rs}{}^i \xi^r dx_s;$$

si suponemos que los ($\xi^i = \delta x_i$) son componentes de un $\overline{\mathrm{PP}'}$ tendremos

$$- \Gamma_{rs}{}^i \delta x_r \,.\, dx_s = \frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_r d\bar{x}_s} \delta\bar{x}_r \,.\, d\bar{x}_s.$$

Evidentemente, pues, la condición de sistema geodésico en P es que

$$\Gamma_{rs}{}^i = - \frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_r \,.\, d\bar{x}_s} = - \frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_s \,.\, d\bar{x}} = \Gamma_{sr}{}^i,$$

siendo

$$dx_i = (\delta_i{}^k = \alpha_i{}^k)\, dx_i;$$

y queda de esta manera completa y matemáticamente definida la conexión afín de un *continuum,* único que consideraremos de aquí en adelante.

Cuando los $\Gamma = 0$ tenemos un sistema geodésico en P y cuando $\Gamma \neq 0$ nos hace conocer la clase de la conexión afín entre P y P′ infinitamente próximo.

Se deduce que podemos elegir para los ($\Gamma_{rs}{}^i$) un sistema de valores numéricos cualesquiera arbitrarios — determinando la transformación en el *continuum* que corresponde, — pudiendo entre todos estos sistemas de valores elegir el 0, y a éste corresponde el sistema geodésico en P. Quiere decir que los ($\Gamma_{rs}{}^i$) no son invariantes y, por lo tanto, *no son componentes de tensor ; únicamente lo son* para transformaciones *generales lineales del continuum.* En cambio, las derivadas de los ($\Gamma_{rs}{}^i$) son componentes de un tensor; pero esto es evidente geométricamente.

La naturaleza de la conexión afín de un *continuum* es única. Los *continuums* son, en este respecto, homogéneos. Pero la clase de la conexión afín en un punto P, definida por los ($\Gamma_{rs}{}^i$), varía de un punto a otro del *continuum* y depende exclusivamente del sistema de nume-

ración coordenada de los puntos. Como el lector ha visto, la posibilidad de solución del problema de conexión afín descansa o radica en la propiedad de traducirse toda transformación arbitraria general de coordenadas, o sea:

$$P = (x_i), \qquad x_i = f_i(\bar{x}_k), \qquad i, k = 1, 2, ..., n,$$

en una rotación del sistema vectorial infinitesimal básico unitario de referencia (e_i) en el punto P. Postulada una transformación afín cualquiera en este sistema de referencia (e_i), de carácter infinitesimal, podemos, mediante una rotación conveniente, convertir la clase de afinidad en igualdad o congruencia. El problema, pues, es determinar la transformación general que produce esta rotación conveniente y hallamos:

$$x_i = f_i(\bar{x}_k) \qquad \Gamma_{rs}{}^i = \Gamma_{sr}{}^i = -\frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_r \,.\, d\bar{x}_s}, \text{ etc.}$$

Para la condición $\Gamma = 0$ los $(\bar{x}_i)$ son coordenadas de un sistema geodésico en P.

Ahora bien; se ve que la ecuación:

$$\left.\begin{aligned} d\xi^i + \Gamma_{rs}{}^i \xi^r dx_s = 0 \\ d\xi^i + d\gamma_r{}^i \xi^r = 0 \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

expresa la condición de traslación paralela de P a P′ infinitamente vecino, del vector de componentes (ξ^i). Esto es, si las componentes (ξ^i) de un vector satisfacen (A) será un vector transportado paralelamente de P a P′.

Supongamos ahora que del cuerpo de vectores en P elegimos uno de componentes (ξ^i) y lo transportamos de acuerdo con (A) a todos los puntos P′ inmediatos o infinitamente vecinos a P. Obtendremos evidentemente un campo vectorial infinitesimal de carácter *estacionario* en P. La condición que tienen que llenar las componentes de los vectores derivados de este vector único es (A).

En otras palabras, tenemos a la vista la ecuación diferencial de un campo vectorial estacionario en P, y podemos elegir a voluntad este campo, esto es, podemos hacer corresponder a cualquier sistema de componentes dadas, de un vector en P (infinitesimalmente se entiende), un campo estacionario. Por otra parte, ésto es manifiesto puesto que se trata de un vector del cuerpo vectorial en P.

Definimos el campo estacionario en P diciendo que es el campo vectorial obtenido por la traslación de un vector cualquiera del cuer-

po vectorial en P, a todos los puntos infinitamente vecinos a P; entendiéndose un mismo y solo vector del cuerpo, que se elige a voluntad. Las componentes de este vector satisfacen a la ecuación (A). Nada más.

Hasta ahora hemos estudiado vectores contravariantes en P. Podemos fácilmente deducir campos vectoriales estacionarios covariantes como sigue. Postulamos que, la invariante $(\xi_i \eta^i)$ no experimenta alteración por efecto del transporte paralelo infinitesimal de P a P'. es decir:

$$d\,(\xi_i \eta^i) = 0$$

y, por lo tanto, siguen los cálculos sencillos:

$$d\,(\xi_i \eta^i) = \xi_i d\eta^i + \eta^i d\xi_i = 0$$

$$d\eta^i = -\, d\gamma_r{}^i \eta^r$$

$$\xi_r d\eta^r + \eta^i d\xi_i = 0 = \xi_r (-\, d\gamma_i{}^r \eta^i) + \eta^i d\xi_i$$

$$\eta^i (d\xi_i - d\gamma_i{}^r \xi_r) = 0$$

$$\text{(A)} \;\ldots\; d\xi_i - d\gamma_i{}^r \xi_r = 0$$

$$\text{B} \;\ldots\; d\xi_i = + \sum_r^n d\gamma_i{}^r \xi_r ,$$

que da la variación de un vector covariante en P por efecto de traslación a P':

$$d\xi_i = \sum_r^n d\gamma_i{}^r \xi_r = d\gamma_i{}^r \xi_r .$$

Así (A) define un campo vectorial covariante en P de componentes (ξ_i). Resulta, pues:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\xi^i = -\, d\gamma_r{}^i \xi^r \\ d\xi_i = d\gamma_i{}^r \xi_r \end{array} \right. \qquad \left. \begin{array}{l} d\xi_i + \Gamma_{rs}{}^i \xi^r dx_s = 0 \\ d\xi_i - \Gamma_{is}{}^r \xi_r dx_s = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} d\xi^i + d\gamma_r{}^i \xi^r = 0 \\ d\xi_i - d\gamma_i{}^r \xi_r = 0 \end{array} \right\}$$

La característica de un espacio plano sería que los $(\Gamma_{rs}{}^i)$ fuesen constantes para todo punto del mismo.

Consideremos ahora un punto P del *continuum* y un vector unido a éste de componentes (u^i) contravariantes. Desde ya podemos imagi-

nar que el punto P se mueve guiado por un parámetro s, que puede bien ser temporal; así, pues, si elegimos:

$$P = (x_i); \qquad x_i = \varphi_i(s); \qquad \frac{dx_i}{ds} = u^i;$$

se ve el significado de los (u^i) fijos en P, es decir, el punto P se mueve llevando unido el vector velocidad de componentes $\left(\frac{dx_i}{ds} = u^i\right)$. Si el campo es estacionario al instante s, en P tendremos:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{rs}{}^i u^r \cdot \frac{dx_s}{ds} = 0,$$

que procede de

$$du^i + \Gamma_{rs}{}^i u^r \cdot dx_s = 0$$

y es finalmente:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{rs}{}^i \cdot u^r \cdot u^s = 0;$$

esta es la condición necesaria para que el vector (u^i) se propague, con el punto P, de P a P′ vecino, sin alteración, siendo la propagación por traslación paralela. Quiere decir que el vector (u^i) se propaga con P, de P a P′, conservando magnitud y dirección *constantes*. En otras palabras, siendo (u^i) la velocidad del punto P en su movimiento regulado por s, debemos interpretar este campo estacionario como la condición de ser libre el punto P en el mismo, es decir, el punto P se traslada rectilínea y uniformemente de P a P′ infinitamente vecino.

En general, P describe una trayectoria geodésica cuya ecuación diferencial es la condición estacionaria establecida.

Cuando

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{rs}{}^i u^r u^s \neq 0$$

será

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{rs}{}^i u^r u^s = V^i$$

en que (V^i) son componentes de una aceleración en el *continuum*, o el apartamiento de la condición de movimiento uniforme traslatorio. Los (V^i) miden la variación del vector velocidad por unidad de tiempo durante el trasporte paralelo de P a P′. Si elegimos un vector covariante (ξ_i) que se mantiene constante en P, cuando se traslada P a P′ (traslación paralela de los (ξ_i)) y si se recuerda el postulado sobre transporte de la invariante

$$(\xi_i \eta^i)$$

se ve que

$$(\xi_i u^i)$$

es invariante y formada con el vector velocidad (u^i). Así,

$$d\,(\xi_i u^i) = 0,$$

por desplazamiento de P a P′

$$d\,(\xi_i u^i) = \frac{d\,(\xi_i u^i)}{ds} = 0,$$

pero

$$\frac{d\,(\xi_i u^i)}{ds} = \xi_i V^i,$$

puesto que los (ξ_i) son constantes y los (V^i) miden la variación de los (u^i) por el desplazamiento paralelo de P a P′. Resulta:

$$\frac{d\,(\xi_i u^i)}{ds} = \xi_i V^i = 0$$

$$V^i = 0,$$

pues (ξ_i) es arbitraria.

Quiere decir que la condición de ser $V = 0$ a todo instante s, acarrea forzosamente la condición de ser los (u^i) las componentes de un vector constante en P. De manera que P se mueve con velocidad y dirección constantes desde P a P′ *a todo instante* y, por lo tanto, describe una trayectoria geodésica como si fuera un punto libre en un espacio newtoniano. Hemos de ver más adelante que esta línea geodésica es «estacionaria», o sea, que la variación de su longitud entre dos puntos determinados por efecto de un desplazamiento infinitesimal de la misma es cero. Descubrimos aquí una propiedad física de una trayectoria rectilínea, a saber: *la historia de un punto que se mueve conservando su velocidad y su dirección.*

También podríamos escribir la condición de campo estacionario en P:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{rs}{}^i \frac{dx_r}{ds} \cdot \frac{dx_s}{ds} = 0,$$

y como

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{d^2 x_i}{ds^2},$$

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \Gamma_{rs}{}^i \frac{dx_r}{ds} \cdot \frac{dx_s}{ds} = 0$$

es la ecuación diferencial de la geodésica.

Para ver la importancia en mecánica de estas ecuaciones, supongamos que μ representa una densidad material unitaria; si

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{rs}{}^i u^r u^s = V^i,$$

será

$$\mu \frac{du^i}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^i \cdot \mu u^\alpha u^\beta = \mu V^i = \mathbf{p}^i,$$

en que los $\mathbf{p}^i$ son componentes de un vector que representa una « densidad de fuerza » en el *continuum*, mientras que $\mu \frac{du^i}{ds}$ son las componentes de un vector unido al punto material (P_μ) que representa la densidad de fuerza en el elemento de materia que se mueve. Vemos que:

$$\mu \frac{du^i}{ds} = \mathbf{p}^i - \Gamma_{\alpha\beta}{}^i \cdot \mu u^\alpha u^\beta = \mathbf{p}^i - \overline{\mathbf{p}}^i$$

si designamos

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^i \mu u^\alpha u^\beta = \overline{\mathbf{p}}^i.$$

Esta ecuación nos dice que si un cuerpo material en un *continuum* a conexión afín describe una trayectoria geodésica ($\mathbf{p}^i = 0$), existe a cada instante del recorrido un equilibrio entre la densidad de fuerza $\left(\mu \frac{du^i}{ds}\right)$ que conocemos de la mecánica clásica, y una densidad de fuerza ficticia $\left(\overline{\mathbf{p}}^i\right)$ puramente matemática. Mejor aún: eligiendo un sistema geodésico de representación en un punto P de la trayectoria se anula la densidad de fuerza ficticia $\left(\overline{\mathbf{p}}^i\right)$. Quiere decir que nos valemos del principio puramente matemático de « transformación continua del sistema de representación »:

$$x_i = f_i\left(\overline{x}_k\right) = f_i\left(\overline{\overline{x}}_k\right), \text{ etc.},$$

para anular el cambio sucesivo continuo de valores representado por los $\left(\mu \frac{du^i}{ds}\right)$. Es así que se explica cómo un sistema de naturaleza determinada, por ejemplo, el ascensor de Einstein, que se desploma sin roce por efecto de la ruptura del cable, constituye un sistema libre o un espacio newtoniano para los pasajeros que contiene, o sea: *relativamente al ascensor o pasajeros el sistema de representación es geodésico.* El ascensor describe una trayectoria geodésica en el campo de gravitación y el pasajero es el sistema geodésico de representación en el punto P que recorre la trayectoria. Para completar, diremos que

esto es posible, por la simple razón de que *la propiedad inerte de la materia* se manifiesta por el fenómeno de peso en un campo de gravitación, y por inercia en un movimiento. Podemos, pues, substituir la gravitación por un movimiento, es decir, por una transformación continua de sistema coordenado de representación.

Los pasajeros del ascensor observarían el movimiento del *continuum* si fuera posible hacer visibles sus puntos; mientras que un observador en un punto del *continuum* observaría el movimiento del ascensor y pasajeros, etc. Y esto, en virtud de la ausencia de aceleración que caracteriza al movimiento libre, hace que sea imposible distinguir el movimiento propio del movimiento del punto o sistema de referencia.

La razón por la cual no es posible distinguir entre el movimiento de un cuerpo y otro de referencia es que no queda historia perceptible para nosotros de la acción en evolución. Se trata, para nuestros órganos de percepción, de acciones de existencia instantánea, como si dijéramos de « carácter puntual », en el sentido de carecer un punto de dimensiones. Cuando la acción deja historia en forma de una « densificación » perceptible, ya no tenemos duda acerca del movimiento; sabemos perfectamente cuál es el cuerpo que posee el movimiento. Hemos tocado, pues, el *fons et origo* de la cuestión relativista y hemos descubierto que el relativismo *ha surgido de aquellos fenómenos que no registran su historia en forma de densificaciones perceptibles para nosotros.*

Nadie duda un instante el hecho de ser un objeto tal cosa, o sea, una historia densificada; pero, en cambio, puede haber serias dudas acerca del movimiento, por ejemplo, de un globo; pues para uno que forma parte del sistema es una cosa, y para otro ajeno al sistema es otra. Pero si el globo registrara su movimiento por una densificación progresiva en el *continuum,* ya no habría duda : *todos veríamos el fenómeno de la misma manera* y convendríamos en su absoluta realidad. Lo mismo sería estar en el globo que fuera del globo. Hemos de volver otra vez sobre este punto interesantísimo, para demostrar que una acción extraña en un *continuum,* al alterar el estado interior de equilibrio estático (que supondremos existía), inicia una historia e introduce una dimensionalidad temporal especial en el mismo, donde antes no existía. Tenemos, pues, el comienzo de un fenómeno de densificación. Nadie puede dejar de observar, por ejemplo, este fenómeno en el *quantum* que designamos con el término de « semilla »; es manifiesta la fase de equilibrio estático relativamente a la acción del

campo solar que ha terminado un ciclo y cuya historia ahí está registrada materialmente por una densificación.

Para terminar esta pequeña digresión podemos añadir que el significado que atribuímos a « haber desaparecido la dimensión temporal de un dominio » es simplemente la cesación consciente para nuestros órganos de percepción de la historia y, por lo tanto, de la « densificación ». Siguiendo este camino de razonamiento se ve cómo la relatividad del « tiempo » es responsable de todos los fenómenos de nuestra percepción consciente.

Volviendo al *continuum,* vimos que en uno de carácter general, era sólo posible el análisis de densidades tensoriales lineales, en virtud del carácter de la magnitud que representan. En un *continuum* a conexión afín podemos extender el análisis a cualquier clase, o especie de tensores, o densidades tensoriales. Veamos esto; supongamos el tensor mixto de segundo orden:

$$\sum_{ik}^{n} f_k{}^i \xi^k \eta_i$$

$$\frac{d}{dx_r}(f_k{}^i \xi^k \eta_i) = \left(\frac{d}{dx_r} \cdot f_k{}^i\right) \xi^k \eta_i + f_k{}^i \left\{ \eta_i \frac{d\xi^k}{dx_r} + \xi^k \frac{d\eta_i}{dx_r} \right\}$$

pero

$$\begin{aligned} \eta_i d\xi^k + \xi^k d\eta_i &= -\eta_i \Gamma_{\alpha\beta}{}^k \xi^\alpha dx_\beta + \xi^k \Gamma_{i\beta}{}^\gamma \eta_\gamma dx_\beta \\ &= -\eta_i \Gamma_{k\beta}{}^\alpha \xi^k \,.\, dx_\beta + \xi^k \,.\, \Gamma_{\gamma\beta}{}^i \eta_i dx_\beta \\ &= \xi^k \eta_i \left\{ \Gamma_{\gamma\beta}{}^i - \Gamma_{\beta k}{}^\alpha \right\} dx_\beta , \end{aligned}$$

ajustando ahora los índices que corresponden al tensor de componentes $(f_k{}^i)$ tenemos fácilmente, adoptando dx_β en vez de dx_r, etc.:

$$\frac{d}{dx_\beta}(f_k{}^i \xi^k \eta_i) = \frac{df_k{}^i}{dx_\beta} \cdot \xi^k \eta_i + \xi^k \eta_i \left\{ f_k{}^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}{}^i - f_\alpha{}^i \Gamma_{k\beta}{}^\alpha \right\}$$

o sea, abreviando:

$$\frac{d}{dx_\beta} f_k{}^i = f_{k\beta}{}^i + f_k{}^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}{}^i - f_\alpha{}^i \Gamma_{k\beta}{}^\alpha ,$$

o si se quiere:

$$f_{k\beta}{}^i = \frac{df_k{}^i}{dx_\beta} + f_k{}^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}{}^i - f_\alpha{}^i \Gamma_{k\beta}{}^\alpha .$$

El juego de índices está a la vista y es de sencillez elemental. Sólo hay que distinguir entre índices independientes y dependientes y los

límites. Por ejemplo, como γ y α varían de la misma manera podemos substituirlos por una r única, o sea:

$$f_{k\beta}{}^{i} = \frac{df_k{}^i}{dx_\beta} + \Gamma_{r\beta}{}^{i} f_k{}^{r} - \Gamma_{k\beta}{}^{r} f_r{}^{i},$$

que da las componentes de un tensor mixto de tercer orden, derivado de uno de segundo orden por un procedimiento invariante, independiente del sistema coordenado del *continuum*, etc.

Tomemos ahora el caso de una densidad tensorial mixta $\mathbf{w}_k{}^i$; no tenemos más que elegir un campo vectorial auxiliar estacionario de componentes (ξ^i) y formar la densidad $(\mathbf{w}_i{}^k \xi^i)$. Si aplicamos un método de divergencia:

$$\frac{d\,(\mathbf{w}_i{}^k \xi^i)}{dx_k}$$

obtenemos:

$$\frac{d\,(\mathbf{w}_i{}^k \xi^i)}{dx_k} = \xi^i \frac{d\mathbf{w}_i{}^k}{dx_k} + \mathbf{w}_i{}^k \frac{d\xi^i}{dx_k} = \xi^i \frac{d\mathbf{w}_i{}^k}{dx_k} - (\mathbf{w}_i{}^k \Gamma_{rk}{}^{i} \xi^r) =$$

$$= \xi^i \left(\frac{d\mathbf{w}_i{}^k}{dx_k} - \mathbf{w}_\beta{}^\alpha \Gamma_{i\alpha}{}^\beta \right).$$

Si elegimos los $(\xi^i = 1)$ será

$$\frac{d\mathbf{w}_i{}^k}{dx_k} = \frac{d\mathbf{w}_i{}^k}{dx_k} - \mathbf{w}_\beta{}^\alpha \Gamma_{i\alpha}{}^\beta = \text{densidad escalar.}$$

Esta densidad escalar es de gran importancia en la teoría de gravitación de Einstein.

Por diferenciación podemos análogamente elevar el orden de una densidad tensorial. Sea el caso de $\mathbf{s}$ = densidad escalar, elegimos un campo vectorial auxiliar estacionario (ξ^i) y se procede:

$$\frac{d\,(\mathbf{s}\xi^i)}{dx_r} = \xi^i \frac{d\mathbf{s}}{dx_r} + \mathbf{s}\frac{d\xi^i}{dx_r} = \xi^i \left(\frac{d\mathbf{s}}{dx_r} - \mathbf{s}\Gamma_{ir}{}^r \right),$$

y tomando los $(\xi^i = 1)$ resulta:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dx_r} = \frac{d\mathbf{s}}{dx_r} - \mathbf{s}\Gamma_{ir}{}^r,$$

densidad covariante de primer orden obtenida por diferenciación de una densidad escalar. Facilísimamente se extiende el método al análisis de tensores o densidades de órdenes superiores y a todas las especies de invariaciones (covariantes, contravariantes, etc.).

Vemos, pues, que la conexión afín nos permite elegir, *ad libitum*, campos vectoriales estacionarios en P, cuyas componentes tienen magnitudes dadas (ξ^i) o (ξ_i) y que esto es posible en virtud de los $(\Gamma_{\alpha\beta}^i)$, pues:

$$\frac{d\xi^i}{dx_\alpha} = -\Gamma_{\alpha\beta}{}^i\xi^\beta \qquad \Gamma_{\alpha\beta}{}^i = -\frac{d^2 f_i}{d\bar{x}_\alpha d\bar{x}_\beta}$$

$$x_i = f_i\left(\bar{x}_k\right) \qquad k, i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

que nos permite calcular los $(\Gamma_{\alpha\beta}{}^i)$ dadas las (ξ^i), y podemos elegir todos los campos estacionarios que querramos en P de esta manera, covariantes o contravariantes, etc.; los cuales facultan reducir a la invariación escalar cualquier tensor dado en P. Esta «elasticidad» del *continuum* es de una perfección admirable, pues nos permite valernos de todas las propiedades de la geometría afín en el espacio plano, después de la linealización. Teniendo bien presente que la conexión afín nos permite trasladar vectores en P paralelamente a sí mismos de P a P′ (propagación paralela) y mediante un sistema geodésico en P, hacer que esta propagación tenga carácter «invariable» en el elemento infinitesimal de *continuum*, podemos operar en P como en un espacio plano, ni más ni menos, y desarrollar el análisis para tensores y densidades tensoriales *ad libitum*.

Así, pues, un campo tensorial cualquiera en P puede, por diferenciación, dar un campo tensorial de orden mayor en una unidad. Densidades tensoriales por divergencia admiten reducción en una unidad. Densidades escalares por diferenciación producen densidades tensoriales de primer orden.

CAPÍTULO IX

Curvatura vectorial

El concepto de curvatura vectorial en el *continuum* es muy importante. Repetimos que el único *continuum* que nos interesa es el que posee conexión afín (Levi-Civita).

Supongamos un movimiento en el *continuum*, de un punto P, por ejemplo, guiado por un parámetro temporal s cualquiera:

$$\mathrm{P} = (x_i), \qquad x_i = \varphi_i(s), \qquad x_i = f_i\left(\bar{x}_k\right),$$

$$\frac{d\varphi_i}{ds} = \frac{dx_i}{ds} = u^i; \qquad \frac{du^i}{ds} = \frac{d^2x_i}{ds^2}; \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n;$$

en que (u^i) son los componentes del vector velocidad en P. Si el campo es estacionario en P al instante s tendremos:

$$u^i = \varphi_i'(s),$$

$$(A) \ldots \frac{du^i}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^i u^\alpha u^\beta = 0.$$

El campo sería estacionario para cualquier otro vector (ξ^i) o (ξ_i) en P al mismo instante si

$$(B) \ldots \frac{d\xi^i}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^i \xi^\alpha \frac{dx}{ds} = 0$$

$$(C) \ldots \frac{d\xi_i}{ds} - \Gamma_{i\beta}{}^\alpha \xi_\alpha \frac{dx_\beta}{ds} = 0,$$

como hemos visto al tratar de la conexión afín. Si el sistema fuese geodésico en P tendríamos los $\Gamma = 0$, etc.

Estas ecuaciones expresan las condiciones que tienen que llenar los componentes de un vector determinado unido a un punto $P = (x_i)$ cuando es transportado paralelamente a sí mismo. con P, desde su posición original a otra infinitamente próxima cualquiera; constituyendo así el elemento infinitesimal de *continuum* vecino a P un campo vectorial estacionario. Quiere decir que dentro de este elemento existe una correspondencia afín vectorial de matriz Γ. Hemos visto cómo una rotación del sistema vectorial coordenado en $P(e_i)$ determinado por una transformación conveniente de los (x_i) puede reducir Γ a cero: este sistema coordenado es el geodésico en P. Observamos, pues, que al pasar de un punto P a otro P′ inmediato, y de éste a otro P″, a su vez inmediato, lo que cambia es la clase de conexión afín, esto es, varía la matriz Γ poseyendo esta variación el carácter de continuidad. Cuando no varía Γ tenemos un caso particular de afinidad euclideana más difundida, no limitada ya al elemento infinitesimal en P.

Esto es lo que emana de la integrabilidad de las ecuaciones (A). Podríamos hablar en este caso de una verdadera propagación vectorial paralela inalterable en el *continuum*. Un *continuum* que es euclideanamente afín y que admite traslación infinitesimal de conjunto de todos sus puntos en forma perfectamente homogénea. Esto permite la introducción de sistemas vectoriales lineales de representación en los cuales vectores que tienen diferentes puntos de emergencia, siendo iguales, tendrán componentes iguales en el sistema de re-

ferencia lineal. En una palabra, el espacio del *continuum* es lineal y afín.

Otra manera de definir este espacio lineal en el *continuum* es la que fluye de la consideración de un transporte vectorial paralelo entre dos puntos arbitrarios P y P′. Percibimos que si son integrables las ecuaciones del campo estacionario, correspondientes a este transporte, un vector infinitesimal unido a P llegará a P′ por cualquier camino o trayectoria sin experimentar variación. Esto es: el transporte es independiente del camino, interpretando esto como es debido.

Deducimos la siguiente conclusión de importoncia: que un *continuum* lineal se distingue entre los *continuums* a conexión afín por el hecho de ser integrable el transporte vectorial paralelo infinitesimal, como quien dijera que las ecuaciones (A) son diferenciales posibles de ser integradas.

La curvatura espacial de un *continuum* se mide — como la gaussiana — por el apartamiento del espacio de la condición de espacio plano euclideano.

Volviendo ahora al caso general, supongamos un punto P y un vector ν infinitesimal en el mismo. Hagamos un transporte paralelo de ν recorriendo P una trayectoria arbitraria cerrada. Manifiestamente que ν será ν' cuando vuelve a P, esto es: no vuelve a su posición inicial. Imaginemos varias trayectorias cerradas en P y hagamos un transporte paralelo de ν haciendo que P recorra, una por una, estas líneas; resultarán ν'', ν''', etc., vectores al final del transporte en P. Aquí, pues, tenemos un efecto de curvatura. Un caso hay en el cual ν vuelve a P sin alteración y este es, precisamente, el caso caracterizado por la integrabilidad geodésica ya considerado. Y es también el caso que distingue al espacio lineal euclideano.

Ahora bien, para conocer la naturaleza del espacio continuo no tenemos más que considerar una curva cerrada en P y un vector infinitesimal en este punto. Transportemos paralelamente el vector haciendo que P recorra el perímetro cerrado lineal anterior, entonces, si el vector vuelve a su posición inicial, diremos que el espacio es plano. Para esto no tenemos más que consultar la integración del transporte a lo largo del perímetro cerrado en P. Empleamos las palabras eligiéndolas con toda intención. Pensemos ahora en el teorema de Stokes. De golpe vemos que este admirable teorema geométrico nos facilita el método de conocer la curvatura en cada punto del *continuum,* como si se tratara de una curvatura específica gaussiana. Veamos ésto: apliquemos una superficie arbitraria a la curva cerrada en

P. Podemos substituir el transporte perimetral por el transporte reticulado del área encerrada por la trayectoria. Pero la rotación reticular nos da una expresión de « intensidad de rotación por unidad de superficie » y ésto, interpretado convenientemente, hará conocer la variación vectorial por unidad de superficie según un elemento de la misma en P, que en el límite es la variación en el punto P, por elemento infinitesimal plano, de determinada dirección; o sea la divergencia de la condición euclideana *plana en el punto* P según la dirección del elemento recorrido. Si esta variación es cero (rotación $= 0$) tendremos un elemento plano en P en la dirección del elemento superficial considerado. Si esta variación es cero (rotación $= 0$) para toda dirección de elementos infinitesimales recorridos en P tendremos un elemento de espacio continuo euclideano en P (curvatura $= 0$).

El lector, de por sí habrá interpretado los elementos de superficies por elementos de superficies paramétricas arbitrarias en el espacio continuo y habrá recordado el principio gaussiano de la invariación de curvatura relativamente a deformaciones continuas de superficies, lo cual hace que sea independiente la curvatura espacial del *continuum* paramétrico de las superficies paramétricas elegidas. Por fin, habrá interpretado la reticulación por una cuadriculación geodésica guiada por dos parámetros arbitrarios, etc.

¿ Acaso puede haber algo más completo y admirable que este concepto de curvatura vectorial ?

Falta ahora dar expresión matemática a la curvatura y esto es muy sencillo. Tenemos que expresar una variación vectorial por efecto de una traslación paralela al rededor del perímetro de un paralelogramo infinitesimal: un $\Delta x_{rs} = dx_r \delta x_s - \delta x_r dx_s$. Si $\mathbf{x}$ es un vector en P y ΔF una matriz de correspondencia lineal entre la variación $\Delta \mathbf{x}$ y el vector $\mathbf{x}$ mismo, vemos que primeramente

$$\Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{F} . (\mathbf{x}) \qquad \text{o} \qquad \Delta \xi^i = \Delta F_k{}^i \xi^k$$

y la correspondencia por recorrido exige que

$$\Delta F_k{}^i = f^i{}_{k.rs} dx_r . \delta x_s = \frac{1}{2} f^i{}_{krs} . \Delta x_{rs},$$

y de aquí:

$$f^i{}_{k.rs} = - f^i{}_{k.sr},$$

o también en forma de matrices lineales:

$$\Delta \mathbf{F} = F_{rs} dx_r \delta x_s = \frac{1}{2} F_{rs} \Delta x_{rs},$$

por lo tanto :

$$\Delta \mathbf{x} = f^i{}_{k.rs}\xi^k e_i dx_r \,.\, \delta x_s.$$

Si, pues

$$f^i{}_{k.rs} = 0$$

será

$$\Delta \mathbf{x} = 0$$

y el espacio en P es plano, infinitesimalmente se entiende. Existe un elemento infinitesimal de *continuum* plano euclideano en P.

Si $\Delta \mathbf{F} = 0$ resulta que el vector $\mathbf{x}$, después de un recorrido infinitesimal, etc., vuelve a su punto P sin variación y esto implica la condición plana por ese elemento plano. Haciendo intervenir la matriz (Δx_{ik}) abarcamos todos los elementos de superficie ($\square$) en P. $\Delta \mathbf{F}$, pues, es la expresión que caracteriza la curvatura en P del *continuum*. Vemos que es un tensor lineal de matrices, o sea, un tensor de cuarto orden.

Fácilmente

$$f^i{}_{krs} = -f^i{}_{ksr} \qquad \text{y} \qquad f^i{}_{k.rs} + f^i{}_{rsk} + f^i{}_{skr} = 0$$

todo lo cual se resume en las ecuaciones

$$f^\alpha{}_{\beta.ik} = \frac{d\Gamma_{\beta k}{}^\alpha}{dx_i} - \frac{d\Gamma_{\beta i}{}^\alpha}{dx_k} + \Gamma_{ri}{}^\alpha\Gamma_{\beta k}{}^r - \Gamma_{rk}{}^\alpha\Gamma_{\beta i}{}^r,$$

que son las ecuaciones fundamentales riemenianas de la curvatura espacial. Resulta, pues, que se trata de un tensor de cuarto orden, dotado de simetría cíclica y levo-simetría, es decir :

$$f^\alpha{}_{\beta.ik} = -f^\alpha{}_{\beta ki}; \qquad f^\alpha{}_{\beta ik} + f^\alpha{}_{ik\beta} + f^\alpha{}_{k\beta i} = 0$$

como hemos escrito ya con otros índices. Demostraremos todo esto valiéndonos del método de doble recorrido de un paralelogramo infinitesimal en P. Ya conocemos este procedimiento de H. Weyl. Sea un vector infinitesimal X en P_{00} de componentes (ξ^i). Si transportamos el punto de emergencia P_{00} hasta P_{11} por los dos caminos posibles del paralelogramo $P_{00}P_{01}P_{11}P_{10}P_{00}$, resultará evidentemente :

$$\Delta\xi^\alpha = d\,.\,\delta\xi^\alpha - \delta\,.\,d\xi^\alpha$$

$$d\delta\xi^\alpha = \{\xi^\alpha(P_{11}) - \xi^\alpha(P_{01})\} - \{\xi^\alpha(P_{10}) - \xi^\alpha(P_{00})\}$$

$$\delta d\xi^\alpha = \{\xi^\alpha(P_{11}{}') - \xi^\alpha(P_{10})\} - \{\xi^\alpha(P_{01}) - \xi^\alpha(P_{00})\}$$

$$\Delta\xi^\alpha = d\delta\xi^\alpha - \delta\,.\,d\xi^\alpha = \{\xi^\alpha(P_{11}) - \xi^\alpha(P_{11}{}')\}$$

que en el límite, cuando P_{11}, P_{11} y P_{00} se confunden, da el valor de $\Delta\xi^\alpha$ en P. De acuerdo, pues, con este resultado geométrico formemos las expresiones analíticas de $d\delta\xi^\alpha$ y $\delta d\xi^\alpha$, recordando que el transporte de los $(d\xi^i)$ puede efectuarse de cualquier manera, y luego imponer la condición paralela

$$d\xi^\alpha = -d\gamma_\beta{}^\alpha\xi^\beta = -\Gamma_{\beta i}{}^\alpha\xi^\beta dx_i,$$

y también será

$$\delta\xi^\alpha = -\delta\gamma_r{}^\alpha\xi^r,$$

así, pues, fácilmente

$$\delta d\xi^\alpha = -\delta\Gamma_{\beta i}{}^\alpha\xi^\beta \, . \, dx_i - (\Gamma_{ri}{}^\alpha\delta\xi^r \, . \, dx_i) - \Gamma_{\beta i}{}^\alpha\xi^\beta\delta \, . \, dx_i$$

$$\delta d\xi^\alpha = -\delta\Gamma_{\beta i}{}^\alpha\xi^\beta dx_i - d\gamma_r{}^\alpha\delta\xi^r - \Gamma_{\beta i}{}^\alpha\xi^\beta\delta \, . \, dx_i$$

en que hemos substituído

$$d\gamma_r{}^\alpha = \Gamma_{ri}{}^\alpha dx_i;$$

pero si el transporte es paralelo tendremos necesariamente

$$\delta\xi^r = -\delta\gamma_\beta{}^r\xi^\beta.$$

en que elegimos los índices como corresponden para indicar el transporte paralelo

$$\delta d\xi^\alpha = -\delta\Gamma_{\beta i}{}^\alpha\xi^\beta dx_i + d\gamma_r{}^\alpha\delta\gamma_\beta{}^r\xi^\beta - \Gamma_{\beta i}{}^\alpha\xi^\beta\delta dx_i,$$

$$\delta d\xi^\alpha = \{ -\delta\Gamma_{\beta i}{}^\alpha \, . \, dx_i + d\gamma_r{}^\alpha\delta\gamma_\beta{}^r - \Gamma_{\beta i}{}^\alpha\delta \, . \, dx_i \} \xi^\beta$$

y análogamente :

$$d\delta\xi^\alpha = \{ -d\Gamma_{\beta k}{}^\alpha\delta x_k + \delta\gamma_r{}^\alpha d\gamma_\beta{}^r - \Gamma_{\beta k}{}^\alpha d\delta x_k \} \xi^\beta.$$

Restando y observando la identidad de los dos últimos términos de los paréntesis:

$$\delta d\xi^\alpha = \{ -\delta\Gamma_{\beta i}{}^\alpha \, . \, dx_i + d\gamma_r{}^\alpha\delta\gamma_\beta{}^r - \Gamma_{\beta i}{}^\alpha\delta \, . \, dx_i \} \xi^\beta$$

$$d\delta\xi^\alpha = \{ -d\Gamma_{\beta k}{}^\alpha\delta x_k + \delta\gamma_r{}^\alpha d\gamma_\beta{}^r - \Gamma_{\beta i}{}^\alpha d\delta x_i \} \xi^\beta$$

$$\Delta\xi^\alpha = (\delta d - d\delta)\,\xi^\alpha = \{ d\Gamma_{\beta k}{}^\alpha\delta x_k - \delta\Gamma_{\beta i}{}^\alpha dx_i + d\gamma_r{}^\alpha\delta\gamma_\beta{}^r - \delta\gamma_r{}^\alpha d\gamma_\beta{}^r \} \xi^\beta$$

$$\Gamma_{\beta i}{}^\alpha\,(d\delta x_i - \delta dx_i) = 0$$

$$d\gamma_r{}^\alpha = \Gamma_{ri}{}^\alpha dx_i; \qquad \delta\gamma_\beta{}^r = \Gamma_{\beta k}{}^r\delta x_k, \text{ etc.};$$

$$\Delta\xi^\alpha = \{ d\Gamma_{\beta k}{}^\alpha\delta x_k - \delta\Gamma_{\beta i}{}^\alpha dx_i + \Gamma_{ri}{}^\alpha\Gamma_{\beta k}{}^r dx_i \, . \, \delta x_k - \Gamma_{rk}{}^\alpha\Gamma_{\beta i}{}^r dx_i\delta x_k \} \xi^\beta$$

$$\Delta\xi^\alpha = \left| \frac{d\Gamma_{\beta k}{}^\alpha}{dx_i} - \frac{\delta\Gamma_{\beta i}{}^\alpha}{\delta x_k} + \Gamma_{ri}{}^\alpha\Gamma_{\beta k}{}^r - \Gamma_{rk}{}^\alpha\Gamma_{\beta i}{}^r \right| \xi^\beta \, . \, dx_i\delta x_k,$$

pero

$$\Delta\xi^\alpha = (d\delta - \delta d)\,\xi^\alpha = \xi^\alpha(P_{11}) - \xi^\alpha(P_{11}^{*}) = \Delta F_\beta{}^\alpha \xi^\beta$$

$$\Delta F_\beta{}^\alpha = f^\alpha{}_{\beta ik} \,.\, dx_i \delta x_k$$

$$\Delta\xi^\alpha = \Delta F_\beta{}^\alpha \xi^\beta = f^\alpha{}_{\beta ik} \xi^\beta \,.\, dx_i \delta x_k$$

y

$$f^\alpha{}_{\beta ik} = \frac{d\Gamma_{\beta k}{}^\alpha}{dx_i} - \frac{d\Gamma_{\beta i}{}^\alpha}{dx_k} + \Gamma_{ri}{}^\alpha \Gamma_{\beta k}{}^r - \Gamma_{rk}{}^\alpha \Gamma_{\beta i}{}^r,$$

como sentamos al principio.

La única dificultad es la que ofrece la variación de la componente (ξ^β), que aparece como

$$d\xi^\alpha = -\, d\gamma_\beta{}^\alpha \xi^\beta \qquad \text{o} \qquad \delta\xi^\alpha = -\, \delta\gamma_\beta{}^\alpha \xi^\beta,$$

o con los índices que se han escrito

$$[-\, \delta\gamma_r{}^\alpha \xi^r],$$

y así $\delta\gamma_r{}^\alpha d\xi^r$, aplicando al $d\xi^r$ el criterio de transporte paralelo. Esto es:

$$\left.\begin{aligned} d\xi^r &= -\, d\gamma_\beta{}^r \xi^\beta = -\, \Gamma_{\beta i}{}^r \xi^\beta dx_i \\ \delta\xi^r &= -\, \delta\gamma_\beta{}^r \xi^\beta = -\, \Gamma_{\beta k}{}^r \xi^\beta \delta x_k \end{aligned}\right\}$$

El elemento será plano si los $\Delta\xi^\alpha = 0$. No puede haber confusión entre las letras d y δ si se distinguen por índices *ad hoc.*

El tensor riemeniano de curvatura vectorial es, pues, un tensor de cuarto orden.

Escribiendo R por f tenemos fácilmente

$$f^\alpha{}_{\beta ik} = R^\alpha{}_{\beta ik},$$

de aquí por contracción formamos:

$$R_{ik} = R^\alpha{}_{i\alpha k} \qquad R = g^{ik} R_{ik},$$

y si alteramos convenientemente los índices se tiene:

$$R_{ik} = \frac{d\Gamma_{ik}{}^r}{dx_r} - \frac{d\Gamma_{ir}{}^r}{dx_k} + \Gamma_{rs}{}^s \Gamma_{ik}{}^r - \Gamma_{ks}{}^r \Gamma_{ir}{}^s.$$

Este es el célebre tensor que bajo la letra R (Riemann) interviene en la ley Einstein de gravitación como escalar de curvatura.

Exactamente análogo es el procedimiento de obtener la variación

de $(\Delta \xi_\varsigma^\alpha)$ valiéndose de dos parámetros (r, s). No hay para qué perder tiempo en repetirlo.

Falta ahora, para completar, dar al *continuum* una conexión métrica y calibrarlo (1).

CAPÍTULO X

Campo métrico

Necesitamos formular una métrica, la más simple posible, mediante la cual nos sea posible relacionar magnitudes lineales en diferentes puntos del *continuum*. Fácil es ver que no basta la conexión proyectiva afín, ni tampoco basta la traslación congruente: esto ya lo vimos en el espacio euclideano. La solución exige, pues:

1° Poder hacer comparaciones de magnitudes en un punto P de emergencia: *medir;*

2° Adoptar un calibre: *un metro;*

3° Conocer la variación que experimenta el metro o calibre, por transporte de un punto a otro del *continuum.*

Pudiendo transportar un metro de un punto a otro y luego efectuar comparaciones en este punto, la conexión métrica queda resuelta satisfactoriamente. Este problema admite un número indeterminado de soluciones y el problema inicial es determinar el de máxima sencillez entre todos los posibles.

Riemann fué quien primero observó que una forma cuadrática pitagórica para apreciar magnitudes puede ser substituída por una bicuadrática, por ejemplo, o cualquier otra que se desee elegir, y que llena condiciones iniciales relativamente a signos, e invariación determinadas. Desde este punto puede decirse que arranca el estudio del campo métrico espacial en el *continuum.* Constituye un problema de importancia trascendental. Antes de abordar este estudio vamos a desarrollar matemáticamente la conexión métrica en un *continuum* postulando ser el mismo de naturaleza pitagórica infinitesimal. Quiere decir que podemos representar a

$$Q(xx) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2 \qquad (\varepsilon_i = \pm 1)$$

en el elemento infinitamente pequeño.

(1) Más adelante deduciremos la escalar R de curvatura empleando otro método.

Diremos, pues, que existe una determinación métrica en un *continuum* si en todo punto P los segmentos lineales, que cada vector del cuerpo vectorial en P determina, son comparables entre sí en cuanto a magnitud. Esto se traduce simplemente en lo siguiente: llamando l la longitud de un determinado vector, es decir:

$$l = X^2 = \sum g_{ik}\xi^i\xi^k,$$

si $Y^2 = l$ será $Y^2 = X^2$ y si $Y^2 \neq l$ será $Y^2 \neq X^2$. Esto es axiomático. Falta adoptar una unidad métrica, y en el momento que hacemos esta elección diremos que el *continuum* está calibrado en P.

Supongamos que $l = X^2$ en que $X = 1$, para fijar ideas; llamaremos a l la medida de este segmento. Si cambiamos el calibre en P, adoptando una $\bar{l} = \lambda l$ será

$$\lambda = \frac{\bar{l}}{l}$$

independiente del calibrado y una función de lugar.

Supondremos que λ es siempre positivo. Esto implica que si la forma cuadrática tiene p dimensiones positivas y q negativas, siendo $p + q = n$ tendrá que ser siempre $p > q$. Siendo convencional, así lo estableceremos.

Tratándose de productos escalares es evidente que si

$$(XY) = 0 \qquad \text{será} \qquad X \perp \text{ a } Y.$$

En general, pues, se tiene:

$$(XX) = X^2 = \sum_{i=1}^{n} g_{ik}\xi^i\xi^k$$

$$g_{ik} = g_{ki}$$

en P.

Numerando el *continuum* de manera que

$$P = (x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

calibramos al mismo en todos sus puntos, es evidente que en cada punto los g_{ik} de la forma fundamental cuadrática son funciones determinadas de los (x_i) y supondremos que éstas son continuas y derivables con derivadas, a la vez, continuas.

Será

$$|g_{ik}| \neq 0$$

en todo punto del espacio o *continuum*, y, por fin

$$p > q$$

como dejamos establecido.

En estas condiciones el problema está resuelto « puntualmente ». o sea por puntos. Necesitamos ahora poder relacionar estas determinaciones métricas puntuales entre sí y procederemos exactamente como en el caso de la « conexión afín ». Formularemos una conexión métrica. Nos basamos en una continuidad métrica y diremos que la conexión métrica consiste en el conocimiento del valor de todo segmento desplazado de P a P′ infinitamente próximo en forma congruente: una propagación métrica congruente caracterizada por una « matriz » de transformación que toma la forma infinitesimal $d\varphi$. Esto es, si l varía en un dl por desplazamiento de P a P′

$$dl = - l d\varphi$$

transformando el calibrado en P, y tomando $l' = \lambda l$, siendo λ una función positiva del lugar, sigue fácilmente:

$$dl = - l d\varphi, \qquad l' = \lambda l,$$

$$dl' = \lambda dl + l \,.\, d\lambda = - \lambda l d\varphi + l d\lambda = - l (\lambda d\varphi - d\lambda);$$

pero

$$dl' = - l' d\bar{\varphi}$$

por transformación, por lo tanto:

$$- l' d\bar{\varphi} = - l (\lambda d\varphi - d\lambda) = - \frac{l'}{\lambda} (\lambda d\varphi - d\lambda) = - l' \left(d\varphi - \frac{d\lambda}{\lambda} \right)$$

y de aquí:

$$d\bar{\varphi} = d\varphi - \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Ahora bien, llamaremos sistema geodésico en P aquel para el cual $d\bar{\varphi} = 0$, lo cual exige que

$$d\varphi = \frac{d\lambda}{\lambda},$$

o que

$$\varphi = \log \lambda;$$

pero

$$d\varphi = \varphi_i dx_i,$$

quiere decir que la única condición necesaria que debe llenar $d\varphi$ para que sea posible un sistema geodésico métrico en P es que sea *una*

forma lineal diferencial. Teniendo presente que λ es una escalar, función de lugar o del punto, basta tomar

$$d \,.\, \log \lambda = \varphi_i dx_i$$

para que

$$d\bar{\varphi} = 0$$

en P, etc.

Fluyen ahora dos consecuencias de la mayor importancia : que la conexión métrica y determinación métrica de un *continuum* exigen la presencia de dos formas fundamentales en toda relación, a saber :

$$x^2 = l = \sum_{ik}^{n} g_{ik} dx_i dx_k, \qquad g_{ik} = g_{ki},$$

$$d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i dx_i.$$

Si transformamos coordenadas resultan los g_{ik} multiplicados λ, esto es :

$$l' = \lambda l = \lambda g_{ik} dx_i dx_k$$

y $d\varphi$ disminuído en $\frac{d\lambda}{\lambda}$,

$$\varphi_i - \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx_i}, \qquad \lambda > 0,$$

siendo λ una función escalar de los (x_i).

Quiere decir, que estas dos circunstancias deben tenerse muy en cuenta para los efectos de la invariación de las leyes. Las ecuaciones que expresan leyes deben ser tales que se mantengan invariantes por efecto de la transformación

$$\lambda g_{ik}$$

y por la transformación de

$$\varphi_i - \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dx_i}.$$

Pasemos ahora al concepto de la « curvatura métrica » del *continuum.* Ésta se descubre haciendo un doble transporte de un segmento al rededor de un elemento infinitamente pequeño de superficie, o sea, un paralelogramo. Resulta, sin necesidad de mayor comentario :

$$\Delta l = \delta dl - d \,.\, \delta l = \delta(-l d\varphi) - d(-l \delta\varphi)$$

$$= -\delta l \,.\, d\varphi - l\delta \,.\, d\varphi + dl \,.\, \delta\varphi + l \,.\, d\delta\varphi = l\Delta\varphi,$$

pues :

$$\Delta\varphi = d\delta\varphi - \delta d\varphi$$

$$= d(\varphi_i \delta x_i) - \delta(\varphi_k dx_k)$$

$$= \frac{d\varphi_i}{dx_k} dx_k \delta x_i - \frac{d\varphi_k}{dx_i} \delta x_i dx_k$$

$$= \left(\frac{d\varphi_k}{dx_i} - \frac{d\varphi_i}{dx_k}\right) dx_i \delta x_k = f_{ik} \,.\, dx_i \delta x_k$$

$$\Delta\varphi = f_{ik} dx_i \delta x_k = \frac{1}{2} f_{ik} \Delta X_{ik}$$

$$\Delta X_{ik} = dx_i \delta x_k - \delta x_i dx_k;$$

por lo tanto :

$$f_{ik} = -f_{ki} \qquad \frac{df_{kl}}{dx_i} + \frac{df_{li}}{dx_k} + \frac{df_{ik}}{dx_l} = 0.$$

Si $\Delta\varphi = 0$ la curvatura es nula y el transporte es invariable en P. Resumiendo :

$$\Delta l = l\Delta\varphi, \qquad \Delta\varphi = \frac{1}{2} f_{ik} \Delta X_{ik},$$

$$f_{ik} = -f_{ki}, \qquad f_{ik} = \frac{d\varphi_k}{dx_i} - \frac{d\varphi_i}{dx_k},$$

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \text{si} \qquad f_{ik} = 0.$$

o sea rotación $= 0$, que implica una $f =$ grad, que es la condición de diferencial exacta o de integrabilidad. Basta elegir $d\varphi = d \,.\log \lambda$ en que $\lambda(x_i) > 0$ y obtendremos un sistema geodésico en P, etc.

Esta condición de $\Delta\varphi = 0$, que hace que $\Delta l = 0$, es la característica del espacio riemeniano. En este espacio es posible, en virtud de $\Delta l = 0$, transportar un metro a cualquier punto del *continuum*.

Por otra parte, se ve y se comprende que la curvatura métrica es independiente del calibrado.

Se llama « calibrado normal », en un espacio Riemann, aquel que hace

$$d\varphi = 0,$$

esto exige naturalmente $\Delta\varphi = 0$, rot $= 0$ y $f =$ grad, como ya indicamos, etc.

Resumiendo; podemos decir que la curvatura métrica de un *continuum* es un tensor lineal de segundo orden de componentes

$$f_{ik} = \frac{d\varphi_k}{dx_i} - \frac{d\varphi_i}{dx_k}, \qquad d\varphi = \varphi_i dx_i.$$

Cuando $f_{ik} = 0$, φ deriva de una potencial escalar, etc.

Calibrando normalmente un espacio Riemann a n dimensiones, será:

$$|g_{ik}| \neq 0, \qquad l = Q = \sum_{ik}^{n} g_{ik} dx_i dx_k, \qquad g_{ik} = g_{ki}$$

constante y determinado con excepción del factor numérico que distingue la unidad.

Llegamos ahora, como dice Weyl con entusiasmo, al pináculo de la geometría infinitesimal, o sea, la íntima relación entre campos métrico y afín. Esto se expresa así: todo transporte métrico congruente entre P y P′ es, *ipso facto,* un transporte paralelo. Lo cual significa que el transporte invariable de un segmento de P a P′ acarrea forzosamente el transporte invariable de la dirección del vector que determina al segmento en P. Podríamos interpretar esto más significativamente, así: la conexión métrica impone simultáneamente la conexión afín en el *continuum,* y es así cómo el lector comprenderá «el entusiasmo de Weyl», puesto que la harmonía de los resultados alcanzados es admirable.

Esto se demuestra fácilmente como sigue.

Si

$$\mathbf{x} = (\xi^i) \qquad \text{en} \qquad P = (x_i)$$

y

$$(\xi^i + d\xi^i) \qquad \text{en} \qquad P' = (x_i + dx_i),$$

será por traslación:

$$d\xi^i = - d\gamma_k{}^i \xi^k,$$

$$d\gamma_k{}^i = \Gamma_{kr}{}^i dx_r;$$

por otra parte:

$$l = g_{ik}\xi^i\xi^k, \qquad g_{ik} = g_{ki},$$

esto es, el tensor es simétrico en i y k, tenemos:

$$\begin{aligned} dl &= \xi^i\xi^k dg_{ik} + g_{ik} d(\xi^i\xi^k) \\ &= \xi^i\xi^k dg_{ik} + g_{ik}(\xi^k d\xi^i + \xi^i d\xi^k) \\ &= \xi^i\xi^k dg_{ik} + (g_{ik}\xi^k)\, d\xi^i + (g_{ik}\xi^i)\, d\xi^k \\ &= \xi^i\xi^k dg_{ik} + \xi_i d\xi^i + \xi_k d\xi^k \\ &= 2\xi_i\, d\xi^i + \xi^i\xi^k dg_{ik} \end{aligned}$$

pero

$$dl = -l d\varphi = -g_{ik}\xi^i\xi^k d\varphi = 2\xi_i d\xi^i + \xi^i\xi^k dg_{ik}$$

$$-2\xi_i \, . \, d\gamma_k{}^i\xi^k + \xi^i\xi^k dg_{ik} = -g_{ik}\xi^i\xi^k d\varphi,$$

y

$$-2\xi_i\xi^k d\gamma_k{}^i = -2\xi^i\xi^k d\gamma_{ik}.$$

Resulta entonces :

$$2d\gamma_{ik} = dg_{ik} + g_{ik}d\varphi,$$

o, por simetría

$$d\gamma_{ik} + d\gamma_{ki} = dg_{ik} + g_{ik}d\varphi,$$

o sea :

$$\Gamma_{i.kr} + \Gamma_{k.ir} = \frac{dg_{ik}}{dx_r} + g_{ik}\frac{d\varphi}{dx_r}.$$

Por rotación cíclica :

$$\Gamma_{i.kr} + \Gamma_{k.ir} = \frac{dg_{ik}}{dx_r} + g_{ik}\varphi_r, \qquad \varphi_r = \frac{d\varphi}{dx_r}, \tag{1}$$

$$\Gamma_{i.rk} + \Gamma_{r.ik} = \frac{dg_{ir}}{dx_k} + g_{ir}\varphi_k, \tag{2}$$

$$\Gamma_{k.ri} + \Gamma_{r.ki} = \frac{dg_{kr}}{dx_i} + g_{kr}\varphi_i. \tag{3}$$

Sumando (2) y (3) y restando (1) recordando que

$$\Gamma_{ab}{}^i = \Gamma_{ba}{}^i$$

y

$$\Gamma_{i.ab} = \Gamma_{i.ba},$$

tenemos :

$$2\Gamma_{r.ik} = \frac{dg_{kr}}{dx_i} + \frac{dg_{ir}}{dx_k} - \frac{dg_{ik}}{dx_r} + g_{kr}\varphi_i + g_{ir}\varphi_k - g_{ik}\varphi_r,$$

o sea, pasando el factor 2 :

$$\Gamma_{r.ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{dg_{kr}}{dx_i} + \frac{dg_{ir}}{dx_k} - \frac{dg_{ik}}{dx_r}\right) + \frac{1}{2}(g_{kr}\varphi_i + g_{ir}\varphi_k - g_{ik}\varphi_r),$$

y también vemos que se tiene

$$\Gamma_{ik}{}^s = g^{rs}\Gamma_{r.ik} = g^{sr}\Gamma_{r.ik} = g^{sr}\Gamma_{r.ki}, \text{ etc.}$$

$$\Gamma_{r.ik} = g_{rs}\Gamma_{ik}{}^s = g_{rs}\Gamma_{ki}{}^s = g_{sr}\Gamma_{ki}{}^s, \text{ etc.},$$

lo cual deja demostrado el teorema revelando que la conexión afín es indispensable para la conexión métrica.

Si, pues, tuviéramos en P:

$$d\varphi = 0 \qquad \text{y} \qquad g_{ik} = \text{constantes}$$

serían los $\Gamma_{irk} = 0$, y el sistema es métrica y afínmente geodésico en P, o lo que es lo mismo: condiciones euclideanas en P. En otras palabras, si elegimos en P un calibrado geodésico y un sistema afín geodésico, será:

$$d\varphi = 0 \qquad \text{y} \qquad \Gamma_{r.ik} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{dg_{rs}}{dx_i} = 0$$

y, por lo tanto, los g_{ik} son constantes y el elemento espacial es plano en P.

Ahora podrá ver el lector cómo todo el cálculo tensorial desarrollado para el *continuum* afín pasa a pertenecer también al campo métrico.

Para terminar, vamos a demostrar una relación geométrica entre las curvaturas vectorial y métrica que es de importancia y sirve especialmente para aclarar conceptos:

$$\Delta\,(f_i\xi^i) = f_i\Delta\xi^i;$$

como sabemos:

$$\Delta = (d\delta - \delta d),$$

$$\Delta l = l\Delta\varphi = \Delta\,(\xi_i\xi^i) = (\xi_i\xi^i)\,\Delta\varphi,$$

$$\Delta\,(\xi_i\xi^i) = \Delta\,(g_{ik}\xi^i\xi^k) = g_{ik}\xi^i\,.\,\Delta\xi^k + g_{ik}\xi^k\,.\,\Delta\xi^i = 2\xi_i\Delta\xi^i = (\xi_i\xi^i)\,\Delta\varphi,$$

y por lo tanto:

$$\xi_i\Delta\xi^i = \frac{1}{2}\,(\xi_i\xi^i)\,\Delta\varphi,$$

o bien:

$$\xi_i\Delta\xi^i - \frac{1}{2}\,(\xi_i\xi^i)\,\Delta\varphi = 0.$$

Si nos fijamos en los productos escalares percibiremos la siguiente correspondencia vectorial:

$$(\mathbf{X}\,.\,\Delta\mathbf{X}) - \left(\mathbf{X}\cdot\frac{1}{2}\,\Delta\varphi\mathbf{X}\right) = 0,$$

y así:

$$(\mathbf{X}\,.\,\Delta\mathbf{X}) = 0 + \left(\mathbf{X}\,.\,\mathbf{X}\frac{1}{2}\,\Delta\varphi\right),$$

si $\Delta\mathbf{X}^*$ es un vector perpendicular a $\mathbf{X}$ podemos escribir:

$$(\mathbf{X}\,.\,\Delta\mathbf{X}) = (\mathbf{X}\,.\,\Delta\mathbf{X}^*) + \left(\mathbf{X}\,.\,\mathbf{X}\frac{1}{2}\,\Delta\varphi\right)$$

o sea, que deriva por proyección escalar de

$$\Delta \mathbf{X} = \Delta \mathbf{X}^* + \mathbf{X} \cdot \frac{1}{2} \Delta \varphi$$

en componentes:

$$\Delta \xi^a = \Delta^* \xi^a + \frac{1}{2} \xi^b f_{ik} \, dx_i \delta x_k,$$

y, por lo tanto, en tensores de curvaturas:

$$F^a{}_{bik} = F^{*a}{}_{bik} + \frac{1}{2} \delta f_b{}^a{}_{ik}$$

$$\Delta \mathbf{X}^* = F^{*a}{}_{bik} e_a \xi^b dx_i \delta x_k$$

en que reconocemos una curvatura de dirección F* normal a la vectorial.

La normalidad de F* se expresa fácilmente por medio de una componente normal (ξ^b), por ejemplo:

$$F^{a*}{}_{b\,.\,ik} \xi_a \xi^b dx_i \delta x_k = F^*{}_{ab\,.\,ik} \xi^a \xi^b dx_i \delta x_k = 0$$

en que estos números constituyen un sistema doblemente simétrico, en *ab* y en *ik*.

Cuando el calibrado y sistema coordenado son geodésicos en P tenemos un elemento plano en P:

$$d\varphi = 0 \qquad dg_{ik} = 0:$$

quiere decir que los $\dot{g}_{ik}$ de la forma Q en P son estacionarios. De aquí fluye que un vector habrá sido propagado paralelamente de P a P′ infinitamente próximo si sus componentes en un sistema geodésico en P se mantienen inalterables o invariables.

Como en una traslación del punto $P = [x_i(s)]$, de P a $P' = [x_i(s + ds)]$ el vector velocidad $\left(\frac{dx_i}{ds} = u^i\right)$ es llevado paralelamente con P, tendremos la ecuación métrica evidente:

$$\frac{dl}{ds} + l \frac{d\varphi}{ds} = 0, \qquad \text{o} \qquad \frac{d(u_i u^i)}{ds} + (u_i u^i)(\varphi_i u^i) = 0,$$

$$u^i = \frac{dx_i}{ds},$$

o, si se quiere, como

$$u_i u^i = g_{ik} u^i u^k = g^{ik} u_i u_k = l,$$

tenemos:

$$\frac{d(g_{ik} u^i u^k)}{ds} + g_{ik} u^i u^k \cdot \left(\varphi_i \frac{dx_i}{ds}\right) = 0$$

cuando la cuadrática Q es indefinida puede ser $u_i u^i = 0$, en un instante cualquiera y vemos que si esto es así será $= 0$ en todo el recorrido de P, pues éste recorre una geodésica de longitud nula. Si, pues, $u_i u^i = 0$, vemos que el segundo término de la geodésica desaparece, e igualmente el primer término si no alteramos la determinación métrica.

CAPÍTULO XI

Cálculo tensorial

Un tensor es una relación proyectiva y depende, por medio de sus componentes, del sistema coordenado en el *continuum*. Es independiente del calibrado. Para establecer una conexión métrica, diremos que toda forma lineal que pasa de un sistema de coordenadas a otro por medio de la transformación conocida y la multiplicación por λ^e, en que λ sale de

$$l' = \lambda l,$$

es un tensor de peso e. La razón está a la vista, puesto que

$$\xi^i = g^{ik}\xi_k, \qquad \xi_r = g_{rs}\xi^s,$$

y al transformar, o cambiar el calibrado, resultan los g_{ik} multiplicados por λ, etc.

Cuando multiplicamos a cualquier tensor por la densidad escalar $\sqrt{g}$ en que

$$g = |g_{ik}|$$

tomado con signo $+$ si q es par, y con signo $-$ si q es impar, en que $q =$ índices negativos de inercia y $p > q$, siendo

$$p + q = n,$$

obtenemos una densidad tensorial de peso más elevado que el original en

$$e = \frac{n}{2}$$

unidades, como es fácil comprobar.

Los

$$\sqrt{g} = \sqrt{|g_{ik}|}$$

y cada término de g tiene n elementos en g_{ik}, que al transformar cali-

brado cada uno resultará multiplicado por λ y el total por λ^n, que debido a la raíz cuadrada da

$$e = \frac{n}{2}$$

como queda indicado.

Se presenta, pues, un método cómodo de cálculo mediante un juego de índices. Esto es, si

$$\xi_s = g_{sr}\xi^r,$$

vemos que, bajando un índice contravariante, elevamos el peso en una unidad, en un tensor cualquiera, y

$$\xi^k = g^{ik}\xi_i = g^{ki}\xi_i$$

es la inversa, y subiendo un índice covariante disminuímos el peso en una unidad; restablecemos la cosa mediante los

$$g_{ik}\xi^k = g_{ki}g^{ki}\xi_i, \text{ etc.},$$

como es evidente.

Notemos una cosa: si el espacio es riemeniano, es decir:

$$f_{ik} = 0 \qquad d\varphi = \varphi_i dx_i$$

es lineal, podemos calibrar normalmente y entonces $d\varphi = 0$ y los g_{ik} toman valores estacionarios. Quiere decir que

$$Q = l = \sum_{ik}^{n} g_{ik} dx_i dx_k$$

tiene un valor perfectamente determinado en el *continuum*. Es evidente, en consecuencia, que todo tensor es a la vez densidad tensorial o que no existe diferencia entre tensores y densidades tensoriales. Como en el caso de vectores cuando el sistema es normal cartesiano, desaparece la distinción entre contra y covariación. Ahora la multiplicación por $\sqrt{g}$ es la multiplicación por un factor constante, etc.

Para abreviar y evitar confusiones los geómetras alemanes distinguen entre tensores y densidades tensoriales obtenidas por la multiplicación por $\sqrt{g}$, mediante una letra especial, letras negras, por ejemplo:

$$\mathbf{R} = \sqrt{g}\mathrm{R}; \qquad \mathbf{F} = \sqrt{g}\mathrm{F}, \text{ etc.}$$

Consideremos un *continuum* a cuatro dimensiones, tres positivas y una imaginaria, o sea, tres índices positivos y uno negativo:

$$p + q = 3 + 1 = 4,$$

$\sqrt{g}$ dará un aumento 2 de peso como se ve.

f_{ik} son las componentes de curvatura métrica, que es un tensor lineal de segundo orden. El tensor obtenido elevando los índices resulta ser contravariante y de peso negativo, o sea — 2, desprovisto de significado. Convirtiendo este tensor en densidad tensorial lineal de segundo orden por multiplicación de $\sqrt{g}$, elevamos el peso en dos unidades, así, pues, obtenemos una densidad tensorial de peso cero:

$$\sqrt{g} f^{ik} = \mathfrak{f}^{ik}.$$

Por divergencia esta densidad nos da la densidad lineal de primer orden

$$\frac{d\mathfrak{f}^{ik}}{dx_k} = \mathfrak{f}^i,$$

que es una magnitud con aspecto de «densidad de corriente» en el caso general. Ya conocemos este aspecto de la divergencia:

$$\frac{d\mathfrak{w}^{ik}}{dx_k} = \mathfrak{w}^i, \text{ etc.}$$

Muy sencillo es caracterizar el espacio riemeniano, como ya explicamos. No hay más que tener en cuenta que

$$Q = g_{ik} dx_i dx_k$$

es invariante, o sea un tensor simétrico covariante de segundo orden. Además los

$$d\varphi = 0 \qquad \text{o} \qquad \varphi_i = 0.$$

Así, pues:

$$\Gamma_{r\,.\,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{dg_{rk}}{dx_i} + \frac{dg_{ir}}{dx_k} - \frac{dg_{ik}}{dx_r}\right) + \frac{1}{2}(g_{rk}\varphi_i + g_{ir}\varphi_k - g_{ik}\varphi_r),$$

$$\Gamma_{r\cdot ik} = g_{rs}\Gamma_{ik}^s,$$

para el caso de *continuum* riemeniano es

$$\Gamma_{r\,.\,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{dg_{rk}}{dx_i} + \frac{dg_{ir}}{dx_k} - \frac{dg_{ik}}{dx_r}\right).$$

Christoffel escribe los $\Gamma_{r\,.\,ik}$ en la forma simbólica siguiente adoptada en todas partes hoy día:

$$\Gamma_{r\,.\,ik} = \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{dg_{rk}}{dx_i} + \frac{dg_{ir}}{dx_k} - \frac{dg_{ik}}{dx_r}\right)$$

$$\Gamma_{r.ik} = g_{rs}\Gamma_{ik}^{s}, \qquad \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} = g_{rs}\begin{Bmatrix} ik \\ s \end{Bmatrix},$$

$$\Gamma_{ik}^{r} = g^{rs}\Gamma_{s.ik}, \qquad \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} = g^{rs}\begin{bmatrix} ik \\ s \end{bmatrix}.$$

Pasaremos a resolver, mecánicamente, algunos ejemplos útiles, como ejercicio del cálculo.

Sea la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{d\sqrt{g}}{dx_i} - \begin{Bmatrix} ir \\ r \end{Bmatrix} = 0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{d\sqrt{g}}{dx_i} = \Gamma_{ir}^{r}, \qquad \frac{d\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \Gamma_{ir}^{r} dx_i,$$

pero

$$\frac{d\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2}\frac{dg}{\sqrt{g}} = \frac{1}{2}\frac{dg}{g}.$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dg}{g} = \frac{1}{2}\frac{d\,|g_{ik}|}{|g_{ik}|} = \frac{1}{2}\frac{\frac{d\Delta}{dg_{ik}}}{\Delta} dg_{ik} = \frac{1}{2} g^{ik} dg_{ik},$$

pues, sabemos que

$$g^{ik} = \frac{\frac{d\Delta}{dg_{ik}}}{\Delta}.$$

Así, pues:

$$\frac{1}{2}\frac{d\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{2}\frac{dg}{g} = \frac{1}{2} g^{ik} dg_{ik};$$

pero también sabemos que

$$g_{ir} g^{rk} = \delta_i^{k},$$

$$g_{ir} dg^{rk} + g^{rk} dg_{ir} = 0,$$

$$g_{ir} dg^{rk} = -\, g^{rk} dg_{ir},$$

y como k recorre todos los valores y hay simetría entre i y k resulta:

$$g_{ik} dg^{ik} = -\, g^{ik} dg_{ik},$$

o

$$g_{ir} dg^{ir} = -\, g^{ir} dg_{ir}.$$

Así, pues:

$$\frac{d\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = -\frac{1}{2} g_{ir} dg^{ir} = \frac{1}{2} g^{ir} dg_{ir},$$

o siendo ab independientes, tenemos:

$$\frac{1}{2} g_{ab} \frac{dg_{ab}}{dx_i} = - g_{ab} \frac{dg^{ab}}{dx_i};$$

los índices ab varían como los ir, etc.

$$\frac{1}{2} g^{ab} \frac{dg_{ab}}{dx_i} - \Gamma_{ir}{}^r = 0; \qquad \frac{1}{2} \frac{dg_{ir}}{dx_i} - g_{ir}\Gamma_{ir}{}^r = 0;$$

siempre hay que notar la dependencia de índices, etc.:

$$\frac{1}{2} \frac{dg_{ir}}{dx_i} - g_{ir}\Gamma_{ir}{}^r = 0 = \frac{1}{2} \frac{dg_{ir}}{dx_i} - g_{ri}\Gamma_{ri}{}^r$$
$$= \frac{1}{2} \frac{dg_{ir}}{dx_i} - \Gamma_{r.ri},$$

o sea:

$$\frac{1}{2} \frac{dg_{ir}}{dx_i} = \Gamma_{r.ir} = \begin{bmatrix} ir \\ r \end{bmatrix},$$

ecuación que ya hemos hallado al estudiar la relación entre conexión métrica y conexión afín. Por otra parte, no hay más que elegir un sistema normal geodésico en P para descubrir la evidencia de la ecuación, pues se anulan los términos.

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{d\left(\sqrt{g} \, . \, g^{ik}\right)}{dx_k} + \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} g^{rs} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\sqrt{g} \, . \, dg^{ik} + g^{ik} d\sqrt{g}}{dx_k} = \frac{dg^{ik} + g^{ik} \frac{d\sqrt{g}}{\sqrt{g}}}{dx_k} =$$
$$= \frac{dg^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} \, . \, g_{ik} dg^{ik}}{dx_k} = \frac{1}{2} \frac{dg^{ik}}{dx_k}.$$

Así, pues:

$$\frac{1}{2} \frac{dg^{ik}}{dx_k} + g^{rs} \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} = 0;$$

pero sabemos que

$$2\Gamma_{k.ik} = \frac{dg_{ik}}{dx_k}; \qquad g^{ik}\Gamma_{k.ik} = \frac{1}{2} \frac{g^{ik} dg_{ik}}{dx_k} = - \frac{1}{2} \frac{g_{ik} dg^{ik}}{dx_k}$$

$$\Gamma_{ik}{}^i = - \frac{1}{2} \frac{g_{ik} dg^{ik}}{dx_k}$$

la dependencia de índices es manifiesta:

$$g^{ik}\Gamma_{ik}{}^{i} = -\frac{1}{2}\frac{dg^{ik}}{dx_k} = g^{rs}\Gamma_{rs}{}^{i} = g^{ik}\Gamma_{ki}{}^{i}.$$

Por fin, consideremos el siguiente caso:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{d\left(\sqrt{g}\,.\,g^{ik}\right)}{dx_l} + \begin{Bmatrix} lr \\ i \end{Bmatrix} g^{rk} + \begin{Bmatrix} lr \\ k \end{Bmatrix} g^{ri} - \begin{Bmatrix} lr \\ r \end{Bmatrix} g^{ik} = 0,$$

el juego de índices es sencillo; tenemos:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{dg^{ik}}{dx_l} = g^{ik}\Gamma_{lr}{}^{r} - g^{ri}\Gamma_{lr}{}^{k} - g^{rk}\Gamma_{lr}{}^{i},$$

$$g^{ir}\,.\,g^{ik}\Gamma_{i\,.\,lr} = g^{ik}\Gamma_{lr}{}^{r},$$

$$\frac{1}{2}\frac{dg^{ik}}{dx_l} = g^{ik}\,.\,g^{kr}\Gamma_{k\,.\,lr} - g^{ri}\,.\,g^{rk}\Gamma_{r\,.\,lr} - g^{rk}\,.\,g^{ri}\Gamma_{r\,.\,lr}$$

$$= -\,g^{ir}g^{rk}\Gamma_{r\,.\,lr} = -\,g^{ir}\Gamma_{lr}{}^{k} = -\,g^{ik}\Gamma_{lr}{}^{r}$$

$$\frac{1}{2}\frac{g_{ik}dg^{ik}}{dx_l} = -\,\Gamma_{lr}{}^{r} = -\frac{1}{2}\frac{g^{ik}dg_{ik}}{dx_l};$$

por fin

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{d\sqrt{g}}{dx_l} = \Gamma_{lr}{}^{r} = \begin{Bmatrix} lr \\ r \end{Bmatrix}$$

resultado conocido.

Por otra parte, todas estas ecuaciones son evidentes.

Hemos visto cómo las componentes de curvatura vectorial tienen la forma:

$$F_{bik}{}^{a} = \frac{d\Gamma_{bk}{}^{a}}{dx_i} - \frac{d\Gamma_{bi}{}^{a}}{dx_k} + \Gamma_{ri}{}^{a}\Gamma_{bk}{}^{r} - \Gamma_{rk}{}^{a}\Gamma_{bi}{}^{r}.$$

Si ponemos R por P y cambiamos índices:

$$\mathbf{R}^{a}{}_{i\,.\,ak} = \frac{d\Gamma_{ik}{}^{a}}{dx_a} - \frac{d\Gamma_{ia}{}^{a}}{dx_k} + \Gamma_{ra}{}^{a}\Gamma_{ik}{}^{r} - \Gamma_{rk}{}^{a}\Gamma_{ia}{}^{r};$$

empleando r en vez a, y s en vez de r:

$$\mathbf{R}^{r}{}_{irk} = \mathbf{R}_{ik} = \frac{d}{dx_r}\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} - \frac{d}{dx_k}\begin{Bmatrix} ir \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} ik \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} sr \\ r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ir \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ks \\ r \end{Bmatrix};$$

permutando índices en el penúltimo término y contrayendo:

$$\mathbf{R}_{ik} = \frac{d}{dx_r}\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} - \frac{d}{dx_k}\begin{Bmatrix} ir \\ r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} rs \\ s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ir \\ s \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ks \\ r \end{Bmatrix}.$$

Esta es la célebre expresión de componentes contraídas, de segundo orden, de Einstein : espacio Riemann.

Hemos dicho que el tensor de curvatura de componentes $(\mathsf{R}_{bik}{}^{a})$ tiene doble simetría, esto es, se entiende un espacio Riemann en que

$$f_{ik} = 0 \qquad (\mathsf{R} = \mathsf{R}^*),$$

$$\mathsf{R}_{ab\,.\,ik} = -\mathsf{R}_{abki} = -\mathsf{R}_{ba\,.\,ik} = \mathsf{R}_{ba\,.\,ki},$$

y por la misma razón de igualdad entre curvaturas vectorial y direccional, resulta

$$\mathsf{R}_{abik} + \mathsf{R}_{aikb} + \mathsf{R}_{akbi} = 0.$$

Riemann liga este tensor con dos elementos de superficie:

$$\frac{1}{4}\mathsf{R}_{ab\,.\,ik}\Delta x_{ab}\,.\,\Delta x_{ik} = \frac{1}{4}\mathsf{R}_{ab\,.\,ik}\frac{\Delta x_{ab}}{\Delta x_{ik}}(\Delta x_{ik})^2.$$

Einstein obtiene el tensor de segundo orden por contracción, o sea:

$$\mathsf{R}^{a}{}_{iak} = \mathsf{R}_{ik} = g_{ik}\mathsf{R}$$

$$\mathsf{R} = g^{ik}\mathsf{R}_{ik} = g_{ik}\mathsf{R}^{ik}, \text{ etc.},$$

en que R, la escalar de curvatura, es la gaussiana. El lector ve que el orden de este tensor depende del carácter del dominio que se considera. Ya lo hemos visto en definiciones.

Más adelante haremos una deducción de la escalar R de curvatura riemeniana, partiendo de la ecuación de curvatura esférica general, expresada por:

$$ds^2 = \frac{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)\sum_i^n dx_i^2 - a\left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)^2};$$

(x_i) = parámetros gaussianos; a = constante de curvatura esférica.

Fácilmente podrá el lector hallar la siguiente expresión para la escalar R suponiendo un sistema normal geodésico en P:

$$\mathsf{R} = g_{ii\,.\,kk} - g_{ik\,.\,ik},$$

en que

$$g_{ik\,.\,rs} = \frac{d^2 g_{ik}}{dx_r dx_s}.$$

CAPÍTULO XII

Trayectorias geodésicas. Función hamiltoniana

Concentraremos nuestra atención sobre las trayectorias estacionarias o geodésicas. Ya las conocemos por las aplicaciones del cálculo de variaciones.

Weyl dice, con cierto humor, que una trayectoria geodésica es «un valor en sal». Esto es, no sabemos si es un mínimo *minimorum* o no. Un círculo máximo sobre una esfera, segmentada por dos puntos, nos permite apreciar esto : la geodésica es, precisamente, un círculo máximo sobre la esfera, pero podemos marchar de un punto a otro del mismo de dos maneras : sea directamente o por las antípodas. Corresponde, pues, la designación hamiltoniana de « estacionarias » a estas trayectorias en virtud de su variación infinitesimal nula, cuando desviamos a las curvas o líneas paramétricamente.

Consideremos la historia de un punto P del *continuum* que densifica una acción guiada por el parámetro extraño s, o sea una densificación unidimensional en el *continuum* o trayectoria lineal. Esta densificación nos permite distinguir o percibir la línea puntual del resto de los puntos del *continuum*. El punto P se traslada de $\mathrm{P} = [x_i(s)]$ a otra posición P′ por un camino que tiene una longitud L determinada. La trayectoria $\overline{\mathrm{PP}'}$ será estacionaria si

$$\delta \mathrm{L} = 0.$$

o sea, variando infinitesimalmente el camino seguido de P a P′ no se produce alteración de longitud. Bien conocido del cálculo de variaciones es todo esto.

Observemos ahora que si el espacio continuo es riemeniano a calibrado normal, tendremos :

$$\varphi_i = 0, \qquad dl + l d\varphi = 0;$$

pero

$$d\varphi = 0.$$

Así, pues :

$$dl = 0,$$

y como

$$l = \xi_i \xi^i = g_{ik} \xi^i \xi^k$$

resulta:

$$d(\xi^i \xi_i) = 0,$$

o

$$\xi_i d\xi^i = -\xi^i d\xi_i.$$

Recordando lo ya explicado tendremos:

$$-\xi_i \Gamma_{ab}{}^i \xi^a dx_b = -\xi^i \Gamma_{ib}{}^a \xi_a dx_b,$$

$$g_{ik} \xi^k \Gamma_{ab}{}^i \xi^a = \xi^i \Gamma_{ib}{}^a \xi_a,$$

$$\Gamma_{k.ab} \xi^k \xi^a = \Gamma_{ib}{}^a \xi^i \xi_a,$$

y; en virtud de simetría en i, k resulta:

$$\Gamma_{kab} \xi^k \xi^a = \Gamma^a{}_{kb} \xi^k \xi_a.$$

Vemos, en consecuencia, que tratándose del transporte paralelo de un vector covariante en $P(\xi_i)$ tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} d\xi_i - \begin{bmatrix} i\beta \\ \alpha \end{bmatrix} \xi^\alpha dx_\beta = 0 \\ d\xi_i - \left\{ \begin{matrix} i\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \xi_\alpha dx_\beta = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Gamma_{\alpha.i\beta} = \begin{bmatrix} i\beta \\ \alpha \end{bmatrix}, \\ \Gamma_{i\beta}{}^\alpha = \left\{ \begin{matrix} i\beta \\ \alpha \end{matrix} \right\}. \end{array}$$

Si, pues, $\xi_i = u_i$ son las componentes covariantes del vector velocidad en P, se tiene:

$$\xi_i = u_i = g_{ik} u^k = g_{ik} \frac{dx_k}{ds},$$

$$\frac{du_i}{ds} - \begin{bmatrix} i\beta \\ \alpha \end{bmatrix} u^\alpha u^\beta = 0,$$

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2} \frac{dg_{\alpha\beta}}{dx_i} \cdot u^\alpha u^\beta = 0,$$

en virtud de que

$$\Gamma_{\alpha.i\beta} = \frac{1}{2} \frac{dg_{\alpha\beta}}{dx_i}, \qquad (\varphi^i = 0).$$

Pero la longitud l de un elemento de trayectoria es, como sabemos:

$$l = Q = g_{ik} \frac{d\xi^i}{ds} \cdot \frac{d\xi^k}{ds},$$

en que $x_i(s)$ es la historia de P y

$$\xi^i = \xi^i(s)$$

el vector velocidad en P, siendo por definición

$$\xi^i = \frac{dx_i}{ds}$$

como se ve.

La longitud de la geodésica fluye directamente de la simple consideración elemental de que si P describe una historia libremente será :

$$Q = g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} = \text{constante},$$

o sea que :

$$\begin{cases} d(u_i u^i) = 0, \\ \quad u_i u^i = \text{constante}. \end{cases}$$

La longitud entre $a \leq s \leq b$, sería pues :

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{Q} \, . \, ds,$$

y siendo geodésica tendremos :

$$\delta L = \delta \int_a^b ds = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\delta Q}{\sqrt{Q}} ds = 0,$$

que es la condición fundamental.

Eligiendo el arco como parámetro, será $Q = 1$ y tenemos :

$$\delta L = \frac{1}{2} \int_a^b \delta Q \, . \, ds,$$

en que hay que calcular a δQ. Esto es elemental y directo, como sigue :

$$Q = (x_i), \qquad x_i = x_i(s),$$

$$dx_i = \frac{dx_i}{ds} \cdot ds = u^i ds,$$

y la variación :

$$\delta x_i = \frac{\delta x_i}{\delta s} ds = \xi^i ds \qquad \text{o} \qquad (\delta s),$$

o bien, es lo mismo apreciar $\frac{\delta x_i}{\delta s}$ en un trecho ds como en uno δs, etc. :

$$\xi^i = \frac{\delta x_i}{\delta s}.$$

Teniendo presente estos detalles, pasemos a la variación de Q:

$$Q = g_{ik} \frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds},$$

$$\delta Q = \delta g_{ik} \cdot \frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} + g_{ik} \delta \left(\frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} \right) =$$

$$= \frac{\delta g_{ik}}{\delta s} \cdot \delta s \cdot \frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} + 2 g_{ik} \frac{dx_k}{ds} \cdot \delta \frac{dx_i}{ds};$$

pero fácilmente, cambiando índices para la variación de los g_{ik} relativamente a δx_i, tenemos:

$$\frac{\delta g_{ik}}{\delta s} \cdot \delta s \frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} = \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x_i} \cdot \frac{\delta x_i}{\delta s} \cdot \frac{dx_\alpha}{ds} \cdot \frac{dx_\beta}{ds} = \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x_i} \xi^i \cdot \frac{dx_\alpha}{ds} \cdot \frac{dx_\beta}{ds}.$$

Además:

$$\delta \frac{dx_i}{ds} = d \frac{\delta x_i}{\delta s} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\delta x_i}{\delta s} \right) ds = \frac{d\xi^i}{ds} \cdot ds.$$

Substituyendo hallamos en seguida:

$$\delta Q = \left[\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x_i} \xi^i \frac{dx_\alpha}{ds} \cdot \frac{dx_\beta}{ds} + 2 g_{ik} \frac{dx_k}{ds} \cdot \frac{d\xi^i}{ds} \right] ds$$

$$= \left[\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x_i} \xi^i \frac{dx_\alpha}{ds} \cdot \frac{dx_\beta}{ds} + 2 g_{ik} u^k \frac{d\xi^i}{ds} \right] ds$$

$$= \left[\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x_i} \xi^i u^\alpha u^\beta + 2 u_i \frac{d\xi^i}{ds} \right] ds,$$

$$\frac{1}{2} \delta Q = \left[\frac{1}{2} \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x_i} \xi^i u^\alpha u^\beta + u_i \frac{d\xi^i}{ds} \right] ds$$

$$\delta L = \int_a^b \left[\frac{1}{2} \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x_i} \xi^i u^\alpha u^\beta + u_i \frac{d\xi^i}{ds} \right] ds = 0.$$

Como

$$\int_a^b u_i \frac{d\xi^i}{ds} ds = \left| u_i \xi^i \right|_a^b - \int_a^b \xi^i \frac{du_i}{ds} ds$$

en que $\left| u_i \xi^i \right|_a^b = 0$, porque los límites son fijos y no participan de la variación, los δ se anulan en los límites y la divergencia es 0:

$$\delta L = \int_a^b \left(\frac{1}{2} \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x_i} u^\alpha u^\beta - \frac{du_i}{ds} \right) \xi^i ds = 0,$$

que es la expresión buscada y exige como condición que

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i} u^\alpha u^\beta = 0.$$

¿Pero qué ecuación es esta? La misma ya hallada e interpretada varias veces: *la trayectoria, o historia del punto P entre dos posiciones, será geodésica si el vector « velocidad » transportado por P conserva su magnitud y su dirección en todo instante.*

Así, pues, la integración de esta ecuación entre dos límites determinados nos dará la trayectoria estacionaria correspondiente.

Deducimos que: una traslación paralela de un vector invariable describe en el *continuum* una geodésica. En otras palabras, una traslación rectilínea uniforme entre dos puntos es una distancia mínima o estacionaria.

$$L = \int_a^b \left[\frac{1}{2} \frac{dg_{\alpha\beta}}{dx_i} u^\alpha u^\beta - \frac{du_i}{ds}\right] \xi^i ds$$

es la función hamiltoniana, o más brevemente, es *una invariante integral en el continuum.*

Fundadamente decimos que este concepto de Hamilton, de « acción estacionaria », es la base más sólida sobre la cual descansa toda la física moderna, lo fué en la mecánica clásica.

DIGRESIÓN 0.65

La teoría de Mie

No cabe duda que la teoría de Mie fué el esfuerzo matemático más eficaz para adelantar camino hacia una solución del problema indeterminado de la materia. Si el edificio geométrico hubiese sido eficiente, el avance de Mie, como el de Einstein, hacia la solución del gran problema, habrían sido cosas de la historia hoy día. Pero el instrumento era defectuoso, y no fué posible llegar a la meta. Había un « enemigo físico » oculto en los mismos cimientos de la construcción geométrica. Mie, penetrado de la ineficacia de la teoría de los electrones de Lorentz, decidió resolver el problema eléctrico y material en sentido inverso. En vez de partir de «cargas» y obtener campo se afirmó en «un campo» y dedujo las «cargas». El resultado sorprendió a todo el mundo, puesto que, se veía una solución inmediata al problema si se lograba vencer la in-

determinación del campo. Precisamente en esto estriba la dificultad. Hacer hipótesis acerca de «un campo» se parece al problema de adivinar el pensamiento por la fisonomía, ni más ni menos. Materia y campo son *repeticiones en dos órdenes de magnitudes.*

Mie hizo la siguiente sencillísima reflexión : el campo electromagnético comprende dos condiciones primordiales de equilibrio : una con aspecto de continuidad y otra con aspecto mecánico (notación de Weyl) :

$$\frac{d\mathbf{s}^i}{dx_i} = 0,$$

$$\frac{dF_{ik}}{dx_l} + \frac{dF_{kl}}{dx_i} + \frac{dF_{li}}{dx_k} = 0,$$

estas dos condiciones entrañan la existencia de

$$\frac{dH^{ik}}{dx_k} = \mathbf{s}^i$$

y

$$F_{ik} = \frac{d\varphi_i}{dx_k} - \frac{d\varphi_k}{dx_i},$$

en que φ es un potencial escalar. En este sencillo proceso lógico de razonamiento matemático se llega a la distinción de dos órdenes de magnitudes : uno de intensidad y otro de extensión.

Ahora bien, considerado cuatridimensional el universo y dividido según el método de Minkowsky en tiempo y espacio, reconocemos en estas invariantes todas las ecuaciones del campo electromagnético — las de Lorentz y de Maxwell, — con una particularidad, que, distinto del de Lorentz, existe diferencia entre (H^{ik}) y (F_{ik}).

Esta distinción entre H y F tiene una importancia, que el mismo Mie no alcanzó a abarcar en su totalidad, *puesto que en ésta estriba la «relación íntima entre la electricidad y la mecánica, demostrando que se trata solamente de dos puntos de vista, nada más»*. Mie, intuitivamente, reconoció que existía una diferencia entre H y F y se fundó en ésta para deducir su invariante hamiltoniana.

Las ecuaciones del campo lorentziano comprenden dos potenciales, uno escalar y otro vectorial ; éstos se hallan involucrados en la ecuación ya clásica :

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} + \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{e} \; \dots \; (\alpha)$$

en la que, como se sabe:

$$-4\pi\varphi = \int_v \frac{[\rho]}{r} d\mathbf{v},$$

$$-4\pi\mathbf{f} = \frac{1}{c}\int_v \frac{[\rho\mathbf{v}]}{r} d\mathbf{v},$$

indicando el paréntesis potencial retardado, o sea tiempo $\left(t - \frac{r}{c}\right)$ en el punto del campo en que existe el elemento de carga, o corriente.

Mie, con un golpe de talento fenomenal, halló una explicación natural y satisfactoria para esa ecuación extraña (α) de potenciales. Esa ecuación, anteriormente, no hallaba acomodo.

He aquí cómo explicó la misma: en un campo constante o estático tenemos ($\mathbf{v} = 0$), por lo tanto:

$$\mathbf{e} - \text{grad}\,\varphi = 0,$$

quiere decir que existe equilibrio entre la fuerza eléctrica $\mathbf{e}$ y una potencia « grad φ », que siendo *normal* tiene aspecto de « presión ». Esto es: ¡la fuerza eléctrica $\mathbf{e}$ está equilibrada por una presión eléctrica! Esto fué realmente admirable, pues, reveló cómo se « mantenía intacto el sistema eléctrico ».

Decimos, pues, matemáticamente: cuando la fuerza eléctrica $\mathbf{e}$ *no* es equilibrada por la presión « grad » se produce una divergencia con magnitud de fuerza que es $\frac{d\mathbf{f}}{dt}$, es decir, la impulsión en acción. Puede acaso haber algo más sencillo o natural que esto?

En seguida Mie, basándose en la forma general de una ecuación de equilibrio, que es la forma de continuidad:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} + \text{div}\,\mathbf{s} = 0.$$

Siendo $\mathbf{w}$ una densidad de energía y $\mathbf{s}$ una densidad de corriente, dedujo la invariante (notación Weyl):

$$\mathbf{L} = \mathbf{w} - \mathbf{e}\,.\,\mathbf{d} - \rho\varphi,$$

y de aquí

$$\delta\mathbf{L} = \frac{1}{2}\mathbf{H}^{ik}\delta \mathrm{F}_{ik} + \mathbf{s}^i\delta\varphi_i,$$

llegando a formular las componentes de impulsión y energía mecánica:

$$\mathrm{T}_i^k = \mathbf{F}_{ir}\mathrm{H}^{kr} + \varphi_i\mathbf{s}^k - \delta_i^k\mathbf{L}.$$

Siendo conocida la forma hamiltoniana

$$\int_G \mathbf{L} \, . \, dx$$

y la variación

$$\partial \int_G \mathbf{L} dx = \int_G \partial \mathbf{L} \, . \, dx = 0$$

que da las leyes por medio de la ecuación de condición

$$\mathbf{s}^i - \frac{\partial \mathbf{H}^{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

De aquí no pudo pasar Mie puesto que la indeterminación de L se defendía con « infinitos fásicos » imposibles de vencer ni con las más elementales hipótesis.

En otra digresión se muestra cómo la ecuación fundamental invariante de propagación, basada sobre la repetición, conduce a la teoría de Mie, abarcando la de gravitación einsteiniana al mismo tiempo:

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i \, . f_i = v^i \mathbf{p}_i$$

$$\int_G \mathbf{c} \, . \, dx = \int_G (\mathbf{s}^i \, . f_i) \, dx = \int_G (v^i \, . \, \mathbf{p}_i) \, dx$$

y la condición de estacionaria

$$\partial \int_G \mathbf{c} dx = 0.$$

En un apéndice consignaremos el teorema relativista de Einstein-Lorentz y la deducción de L de Mie.

DIGRESIÓN 0.66

Número

Número, símbolo de repetición y, por lo tanto, símbolo de continuidad. Pero es necesario observar que esta continuidad se refiere al pasado, única y exclusivamente, no al futuro. Si existe el número 1.000.000 por haberlo percibido conscientemente nuestros órganos de inteligencia, es porque ha existido toda la sucesión continua anterior que lo liga con la focalización de 1.

Vemos, pues, que es tan sólo en el presente que *puede producirse la interrupción o discontinuidad; únicamente en el presente.* Ahora bien: repetición es acción y es propagación. El número simboliza en-

tonces la propagación. No es todo; es menester recordar que nuestras percepciones son continuas y se inician en el punto del *continuum*, o límite cero, lo cual implica que no hay geometría abstracta. La consecuencia de esto fluye directamente, es decir, el número simboliza toda la fenomenalidad del *continuum* perceptible. ¡No hay propiedad que posea el número que no simbolice un fenómeno de la naturaleza!

Es por esto que tiene importancia el estudio de esta rama de las matemáticas, quizá el más difícil de toda la ciencia. Volvamos a recorrer el proceso lógico mental para cerciorarnos que no hemos incurrido en error:

La repetición es *fons et origo* de toda la fenomenología en nuestro *continuum* mayor;

El número es el símbolo de la repetición;

Repetición es propagación;

Toda fenomenología estriba en nuestra perceptibilidad. Nuestras percepciones son continuas y se inician en el límite inferior o « punto existente », o sea, cero del *continuum*.

No hay, pues, geometría abstracta. Nuestro cerebro al percibir todo lo existente, engendra fácilmente los espacios, superficies, etc., de todas las maneras paramétricas posibles, como una función natural. Esto es, siendo posible unir los puntos de un espacio o superficie, en forma continua, por líneas paramétricas (generatrices), etc., el cerebro hace esto, nada más. Por esto es que tenemos la concepción paramétrica; no por abstracción, como creyó Cayley.

Pasemos ahora a considerar alguna de las propiedades más generales y conocidas del número, dejando indicado al lector el camino para seguir y profundizar este interesantísimo estudio.

Los números se suceden continuamente.

Los números se « apilan » en grupos y se propagan los grupos, viz:

$$1, 1, 1, ...; \qquad 2, 2, ...; \qquad 3, 3, ...,$$

y por ejemplo:

$$1, 2, ..., 10$$

$$10^1, 10^2, ..., 10^{10}$$

$$100^1, 100^2, ...$$

La característica de un apilamiento o un grupo es su base.

Las bases pueden ser cualquier número mayor que *uno*.

La base es característica de una *densidad escalar* y la llamaremos

así por consideraciones futuras. Una densidad escalar se repite y pueden repetirse a su vez las densidades que contiene como grupos menores : grupos y subgrupos.

Comprendemos perfectamente los infinitos fásicos en este género de repetición, o propagación, simbolizada por números. Si existe el grupo o la densidad 10^n (n = peso de la densidad), por ejemplo, es porque *existen, o han existido todas las densidades menores.*

Una densidad cualquiera siempre se distingue de otra menor en la posesión de todas las propiedades de esta menor y de otras « más avanzadas » que no posee esa menor.

Si nos fijamos bien, observaremos en este proceso matemático grupal de repetición, una singular analogía con otro proceso físico que nos rodea en este planeta y que llamamos *evolución.* Pero para comprender perfectamente esto sugerimos el siguiente esquema abstracto : Una focalización propaga por repetición una densidad grupal que simbolizaremos con la base 10^n; la observación nos hace saber que este fenómeno tiene lugar cuando sobreviene una resonancia térmica cuyo término medio en el termómetro es 12° centigrado, a título de simple ejemplo esquemático.

Decimos, pues, a los 12° C crecen por repetición los 10^n y el proceso es tanto más uniforme cuanto menores son las oscilaciones del lado inferior a los 12° C. Cada vez que la temperatura baja de este nivel se detiene gradual y progresivamente la focalización.

Una causa *exterior* eleva la resonancia térmica haciendo que la temperatura ascienda de 12° C hasta los 28° C en el termómetro y conjuntamente con este fenómeno notamos lo siguiente :

A 12° C se repiten los 10^n (se propagan);
A 15° C se repiten los 10^{n-l} (se propagan);
A 20° C se repiten los 10^{n-m} (se propagan);
A 25° C se repiten los 10^1 (se propagan);
A 28° C se repiten los $10^0 = 1$ (se propagan).

Notemos ahora que la repetición de los 10^n, *conservando su ambiente,* persiste siempre mientras la temperatura exceda de 12° C, la de los 10^{n-l} también, conservando su ambiente, mientras exceda de los 15° C, la de los 10^1 igualmente, mientras exceda de 25° C, etc.

Compliquemos ahora el esquema con una harmonización diciendo que durante una rotación tenemos :

Media noche a amanecer termómetro	12° C
Amanecer hasta las 8 horas — Este	15° C
8 horas hasta 10 horas	20° C

10 horas hasta 12 horas medio día — N-S . . .	25° C
Medio día hasta 13 horas	28° C
13 horas hasta 15 horas	25° C
15 horas hasta 17 horas (W poniente)	20° C
17 horas hasta 19 horas	15° C
19 horas hasta 24 horas media noche — N-S .	12° C

En consecuencia, si nos fijamos bien en este esquema hipotético y representamos físicamente su importe tendremos perfectamente delineado el proceso de desarrollo, por ejemplo, de una planta o un árbol. Para completar exactamente el esquema debemos añadir la rotación angular orbital :

Invierno	0° C
Primavera	12° C
Verano.	20° C
Otoño	13° C

Cualquiera puede deducir las consecuencias y ver el « proceso ». Llenamos un vacío al mencionar el sol como focalización que engendra la resonancia térmica y que tiene la virtud de provocar la densificación, y la tierra con sus constantes planetarias (inclusive luna) como proveedora de los $10° = 1$. presidiendo la harmonía y la evolución.

Si nuestro universo perceptible es un *continuum* de repetición y el número es un símbolo de repetición, la inferencia es muy clara : debemos poder expresar por medio de propiedades numéricas todos los fenómenos métrico-proyectivos posibles. Hagamos unos simples parangones, dejando para inteligencias más hábiles la elaboración y profundización. Llamemos peso de una densidad al exponente de su base escalar ; por ejemplo :

$$10^n \qquad 10 = \text{base escalar}$$

$$n = \text{peso}$$

digamos ahora : una base de peso *n se dividirá por resonancia térmica hasta degenerar en*

$$10° = 1$$

y al llegar a esta métrica *se disolverá en el continuum ambiente a curvatura esférica determinada.* Tenemos, pues, cuatro grandes grupos, a saber :

Pesos que tienen la forma $2n$;

Pesos que tienen la forma $(2n - 1)$;

Bases escalares que tienen la forma $2n$;

Bases escalares que tienen la forma $(2n - 1)$.

Y dentro de los grupos impares tenemos *los números primos indivisibles*. Por un fácil discurrimiento verá el lector la analogía matemática de los procesos en la botánica:

Dicotiledóneas, o sea, tallo, ramerío, hojas;

Monocotiledóneas: tallo, hojas;

que corresponden a las dos grandes divisiones de «pares e impares».

Si tenemos:

$$n^{\circ} = 1 \qquad \text{(peso cero)}$$

$$1^{m} = 1$$

¿Cómo no ver simbolizada ahí la familia de las *gramináceas*, los vulgares pastos? Pero también verá que cuando

$$n = \text{número primo (indivisible)}$$

tendremos en

$$n^{\circ} = 1$$

una familia de pastos cuyas «hojas» son *conos agudos* terminados en punta-espinas (pasto puna). ¿Qué quiere decir esto? Simplemente, que una base par o impar, pero no primo, y un peso n = número primo, simboliza la familia de los *euforbios* o *cactus* y de los árboles espinosos (urticáceas) y de los equisitíneos o «cola de caballo», etc.

¿Por qué? Porque siendo indivisible el número primo la propagación única posible es por unidades «unos» y, así, una resonancia térmica, obrando con simetría radial pero con intensificación vertical, produce la forma conicoidal, cuya expresión matemática diferencial todos conocemos, y cuya ley de formación revela «un modo de variación esférica» del espacio ambiente.

¿Para qué seguir? Si el vínculo entre naturaleza y matemáticas está a la vista: Repetición-Número.

¿Puede acaso haber algo más simple que esto?

Comprendemos ahora lo que significa repetición y su símbolo el número. Un proceso de sencilla generalización intuitiva conduce a nuestra tesis sobre la densificación del cuerpo humano ya descrita. Un verdadero *quantum* de repeticiones. Ahora nos falta hacer alusión a lo principal; lo más asombroso y admirable. ¿Cómo podemos, mate-

máticamente, explicar el proceso de crecimiento y nutrición, o distribución del material « grupal » ?

Ha sido por esto que hemos designado al grupo con el nombre de densidad.

Sencillamente : un grupo es un *quantum* y *un quantum conserva su curvatura espacial esférica.* Quiere decir que un *quantum* no sale de su espacio ambiente, *libremente,* porque para penetrar en otro *quantum* menor tiene forzosamente que *deformarse* para conformar con *una curvatura esférica espacial diferente.* La deformación es una deformación de su forma métrica fundamental, y esto afecta *todos sus órdenes de magnitudes,* es decir, afecta la densidad o densificación, *a fortiori*, pues, para cambiar de ambiente continuo tiene que *cambiar de estructura* o deformar por *transformación.* Por esto es que Natura *non facit saltum.* En otra digresión hacemos el proceso analítico de este fenómeno y demostramos la invariación de la repetición, a la par de la invariación de densificación y de curvatura espacial riemeniana. Es recién ahora que el lector puede apreciar el asombroso alcance de las matemáticas !

Dejamos así establecido lo que hemos deseado exhibir : el significado de repetición, número y propagación, a la par de grupos, densidades, resonancia de gravitación (térmica) y curvatura esférica espacial.

No podemos terminar sin hacer alusión a W. K. Clifford, quien « comprendió intuitivamente todo ésto », pero... sólo vivió 34 años. No tuvo tiempo (1).

DIGRESIÓN 0.67

¿ Por qué la repetición es invariante como la curvatura ?

El lector habrá interpretado ya el significado de la repetición cuyo símbolo es el número y se habrá convencido que con su introducción desapareció el último vestigio de « magnitudes globales o integrales »

(1) En el ejemplo abstracto : « conservar su ambiente » significa que la focalización de los 10^n y 12° C se desplaza (crece ?) conservando los 12° C, resistiendo una variación de curvatura esférica por efecto de gravitación térmica. Si no hiciera esto tendría el foco que deformarse y cambiar de « forma métrica fundamental » o densidad. Se comprende así « matemáticamente » por qué se propagan los subgrupos, etc.

que tan escrupulosamente el profesor H. Weyl trató de eliminar de la geometría infinitesimal riemeniana. Ya no nos conciernen los (dx_i), o los desplazamientos globales, excepto como propagaciones puntuales en una dimensión. Trabajamos ahora con los puntos constituyentes básicos de una magnitud. Nuestro edificio harmónico tensorial infinitesimal es de « puro contacto y de pura continuidad ».

Pensamos ahora dejar establecida y demostrada la invariación de la repetición. No permitiremos que se corte la « hilación » de ideas, una vez llegados a la meta, sino que seguiremos avanzando hasta donde la lógica matemática y la física nos permitan alcanzar.

Para estos fines necesitamos remontar a la consideración analítica de lo que se denomina « curvatura ». Primero de una línea plana, después de una gaussa, en seguida de una superficie y, por último, de un espacio. Tenemos, pues, que repetir lo que se ha tratado en otra parte.

Adoptando el método de Clifford, de generación de líneas planas, supondremos un punto que se mueve rectilíneamente y una causa extraña, de orden mayor de magnitudes, que hace girar continuamente la trayectoria recta al rededor del punto mismo. La curvatura aparece de esta manera como la rotación por elemento puntual recorrido, cuando este último disminuye indefinidamente. También se comprende directamente la definición, que fluye como simple consecuencia, es decir, « la curvatura de una línea plana es su divergencia de la condición rectilínea ».

Es preciso tener presente que la condición rectilínea es una condición circular límite (radio infinito), y que *toda curva se considera circular en sus elementos infinitesimales, variando la constante de circularidad (radio) escalarmente.* Después se verá la exacta analogía y correspondencia en el caso de espacios continuos arbitrarios paramétricos:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{ds}=\frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\frac{\omega}{v} \qquad \text{(Clifford).}$$

Si se trata de una gaussa elegimos una esfera de radio unitario y trazamos planos diametrales paralelos a los osculadores de la gaussa, éstos envolverán la característica esférica, etc. La característica esférica nos permite analizar las dos curvaturas o rotaciones.

En el caso de una superficie procedemos, como indicó Gauss, a calcular la curvatura mediante una esfera unitaria que nos permite avalorar la divergencia de normales sobre la superficie. Esto es, trazamos

por el centro de la esfera radios paralelos a las normales levantadas en cada punto de un elemento infinitesimal de área sobre la superficie. Estos radios marcarán una característica $d\omega$ de área esférica. Si $d\sigma$ es el área sobre la superficie tenemos como expresión gaussiana de curvatura la relación $\frac{d\omega}{d\sigma}\cdot$ Ya sabemos que si ρ y ρ' son los radios principales de curvatura de dos secciones normales en un punto P de la superficie, entendiéndose las dos secciones normales principales:

$$\frac{1}{\rho\rho'} = \frac{d\omega}{d\sigma} = \text{curvatura};$$

y si la superficie tiene la forma

$$z = \varphi(x, y)$$

y si cos (nz) es el coseno del ángulo que forma la normal en P con OZ

$$\frac{1}{\rho\rho'} = \text{H} \,.\, \cos^2(nz).$$

en que H es la hessiana de la función, etc.

Por fin, si expresamos paramétricamente la superficie, y ponemos atención en que

$$ds^2 = \sum_{ik}^{2} g_{ik} dx_i dx_k,$$

en que (x_i) y (x_k) son los parámetros :

$$(x_1),\ (x_2)$$

y

$$g_{ik} = \sum \frac{dx_m}{dx_i} \cdot \frac{dx_m}{dx_k},$$

en que :

$$n = 1, 2, 3,$$

$$ik = 1, 2,$$

descubrimos que la curvatura gaussiana puede expresarse en función de las segundas derivadas de los coeficientes del elemento ds^2. Por otra parte, como el plano tangente en un punto de la superficie y el plano tangente en el punto correspondiente de la esfera unitaria son paralelos, vemos que existe una linealización común que hace que una

área elemental geodésica se relacione con su correspondiente esférica por medio de la curvatura, o sea, un módulo que es invariante relativamente a toda deformación continua de la superficie que deja inalterada al elemento geodésico, es decir, *que no altere la estructura puntual de la superficie en P.*

Esta invariación geodésica es de la más trascendental importancia, pues nos demuestra que se trata de una escalar de curvatura o tensor de orden cero, y vamos vislumbrando una relación entre *curvatura* y *repetición* por ese concepto de « la estructura puntual = propagación puntual en dos dimensiones ».

Fácil es ver que *la curvatura de superficie es una divergencia de la condición esférica límite de radio infinito* o, si se quiere, la divergencia de la condición plana.

Resulta, pues, que aquellas deformaciones que no alteran a la forma fundamental de Gauss:

$$ds^2 = \sum_{ik}^{2} g_{ik} dx_i dx_k,$$

$$g_{ik} = g_{ki},$$

no alterarán la curvatura y, por lo tanto, *no alterarán la estructura puntual* de la superficie, o digamos de una vez: *no alterarán la densidad puntual de la superficie.* Para alterar la densidad puntual es necesario alterar el carácter de la continuidad puntual que distingue la superficie como un *quantum* sumergido en un *continuum* mayor. Esto es, *un quantum perceptible.* En otras palabras: *hay que alterar la ley de la repetición puntual generatriz,* o sea la propagación puntual bidimensional en P:

$$\mathbf{C}_p = \nu_1 \lambda_1 + \nu_2 \lambda_2,$$

en que los términos representan las dos propagaciones paramétricas generatrices. Resumiendo: *alterar la curvatura de Gauss, es alterar la densidad puntual.* Esto es lo mismo que decir: *densificar;* y aparece de golpe el concepto « dinámico » del fenómeno o presencia de una acción de fuerza. *Alterar la ley de repetición es alterar una ley de acción.* Es, pues, acción.

Pasamos al espacio, con Riemann, Clifford y Einstein, de la manera más simple: generalizando. El *continuum* espacial de n dimensiones, « chato en sus elementos infinitesimales », en el que un punto se sitúa relativamente a otro por una dirección geodésica y una distancia mínima (geodésica) cuya forma fundamental es:

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n} g_{ik} dx_i dx_k \qquad i, k = 1, 2, ..., n$$

y

$$g_{ik} = g_{ki}$$

como en el caso paramétrico de Gauss. Medimos *la curvatura espacial como una divergencia de la condición esférica límite* (radio infinito): euclideana plana. Quiere decir que en un *continuum* de n dimensiones será necesario calcular la curvatura gaussiana de superficie paramétrica en $\frac{1}{2} n (n - 1)$ direcciones arbitrarias o independientes, entendiéndose en las direcciones normales de superficies. Vemos, en consecuencia, que se trata de un tensor de curvatura espacial. El significado de este procedimiento aparece cuando englobamos el caso « plano euclideano » como un caso especial del espacio continuo general. No hay más que tomar la forma fundamental

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n} g_{ik} dx_i dx_k,$$

$$g_{ik} = g_{ki},$$

y aplicar una transformación arbitraria al *continuum* que afecta las n coordenadas. Esta transformación nos permitirá determinar a n coeficientes de los $\left[n + \frac{1}{2} n (n - 1)\right]$ coeficientes de la fundamental cuadrática, quedando $\frac{1}{2} n (n - 1)$ indeterminadas *que son los que caracterizan precisamente, la curvatura Riemann espacial. Determinan la métrica espacial.*

La misma invariación de curvatura relativamente a deformaciones arbitrarias continuas que no alteran la estructura puntual del *continuum* subsiste en este caso generalizado de Riemann.

Un espacio homogéneo (puntual) es un espacio esférico y *si no es homogéneo será esférico en sus elementos infinitesimales*, de acuerdo con el principio Leibnitz de órdenes de magnitudes. Quiere decir que en un espacio arbitrario podemos admitir *una curvatura espacial constante en la vecindad inmediata de cualquier punto y dentro de este elemento espacial* aplicar los principios de traslaciones congruentes o propagaciones uniformes, etc. (Levi-Civita, Ricci, etc.) El carácter de este espacio así concebido comprende precisamente el del *continuum* a conexiones afín y métrico. Recordar que una superficie es esférica en sus elementos infinitesimales (plano tangente como límite y esfera

en caso de una umbilical; los demás casos, esfera de menor curvatura).

Interesa, pues, especialmente conocer la forma analítica de esta curvatura esférica y ésta se obtiene sencillísimamente, generalizando la correspondencia paramétrica plana de una esfera, como lo hizo Riemann:

$$ds^2 = \frac{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)\sum_i^n dx_i^2 - a\left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)^2}$$

$a =$ curvatura esférica.

Decimos que si $a = 0$ tenemos el caso euclideano plano:

$$a = 0 \qquad ds^2 = \sum_i^n dx_i^2 = ds_0^2.$$

Admitamos una variación de curvatura esférica da y limitándonos a un orden de magnitudes podemos tomar la unidad por denominador, así:

$$P = (x_i) \qquad ds^2 = \sum_i^n dx_i^2 - da\left\{\sum_{ik}^n x_i x_i dx_k dx_k - \sum_{ik}^n x_i x_k dx_i dx_k\right\}$$

$$= ds_0^2 - \mathbf{R} \,.\, da,$$

poniendo

$$\mathbf{R} = \sum_{ik}^n x_i x_i dx_k dx_k - \sum_{ik}^n x_i x_k dx_i dx_k,$$

vemos, pues, que si *sentamos la ley de continuidad para la curvatura espacial, como dijo Clifford en 1870,* la expresión

$$ds^2 = ds_0^2 - \mathbf{R}da$$

contiene la ley de variación de curvatura esférica de un elemento espacial a otro vecino. Esto implica que *la condición euclideana plana no es absoluta sino relativa* y que el 0 *límite* es simplemente *un origen de referencia convencional,* que podemos elegir *ad libitum.* Más claramente, nosotros sumergidos en un espacio esférico constante, u homogéneo, carecemos « en absoluto » de los *medios* de poder decidir si se trata de un espacio euclideano plano (radio infinito) o uno esférico; exactamente como en el caso de movimientos uniformes en un espacio newtoniano-galileano (1).

(1) No podemos avalorar la esfericidad de un espacio homogéneo porque nuestras visuales son geodésicas y nos es imposible medir con metros. El único medio a mano sería apreciar la relación entre diámetro y círculo. Sobre nuestro plane-

La simple observación de los términos que componen la forma fundamental métrica de Riemann revela que son invariantes relativamente a transformaciones ortogonales, esto es: invariantes relativamente a rotaciones continuas. Precisamente éstas son las transformaciones que conservan la densidad, etc.

Fácil es ver que podemos linealizar en un sistema normal geodésico y hacer que

$$\mathbf{R} = \sum_{ik}^{n} x_i x_i dx_k dx_k - \sum_{ik}^{n} x_i x_k dx_i dx_k$$

corresponda a

$$\mathbf{R} = g_{ii.kk} - g_{ik.ik}$$

en que

$$g_{ik.rs} = \frac{d^2 g_{ik}}{dx_r dx_s} = g_{ik.sr}$$

con Einstein. Reconocemos en R la conocida escalar de curvatura de Riemann. Esto es de paso, pero nos hemos desviado del camino y tenemos que retroceder para tomar el hilo que nos conduce a la repetición como invariante a la par de curvatura.

Se ha establecido ya que toda deformación que deja inalterada la clase de continuidad puntual, o sea, la estructura puntual de una superficie paramétrica gaussiana, deja también inalterada la curvatura gaussiana. Esto se aplica también al caso espacial, como es evidente. No puede haber dificultad alguna, en virtud de este principio de invariación, en comprender lo que sigue, y su alcance:

La invariación de curvatura espacial depende de la densidad puntual, esto es, mientras no varía la densidad puntual en un elemento espacial tampoco variará su curvatura esférica.

Mientras no varía la densificación no variará la curvatura espacial. Una variación de curvatura espacial es una variación de densidad puntual; es una variación de clase de la continuidad y, por lo tanto, *es una variación de estructura espacial.*

ta podemos, como Gauss, ensayar con éxito este sistema. ¿ Pero en el espacio a visuales geodésicas ?

¿ Un ser plano en un universo plano de Klein se daría cuenta acaso de la variación (euclideana) de su metro a medida que se extendiera en una dirección rectilínea cualquiera ?

Volvemos, pues, al problema fundamental metafísico que es en las desigualdades que originan las percepciones y sobre las cuales se funda el raciocinio, como si dijéramos: el número simboliza la igualdad en la naturaleza, y el lenguaje simboliza las desigualdades.

Se presenta aquí, pues, el problema de la posibilidad de existencia de una invariante relativamente a alteraciones, como la curvatura ? Buscando ésta fué que descubrimos la repetición, cuyo símbolo es el número.

Brevemente y sin mayor comentario, *repetir es densificar.* De golpe se reconoce que estamos en presencia del *fons et origo.*

La repetición es como la curvatura: independiente de toda transformación continua, etc. ¿Que es repetición ? Sencillamente: *repetición es acción.*

Una densidad emana de una repetición de cualquier cosa, en absoluto. El misterio es: acción.

Si la religión nos dice que Dios hizo todo a su semejanza, entonces Dios repite, y así hallamos una razón matemática en el dogma. Pero la repetición obra sobre « material existente »; podemos, en consecuencia, decir que la repetición engendra un orden de magnitud por medio de otro menor. Sí existen, pues, en un *continuum* dimensiones de orden *imperceptible,* la repetición engendrará nuevos órdenes, sujetos a la continuidad, que entran a ser perceptibles conscientemente.

Al sentar que carecemos, en un espacio homogéneo, del medio de poder determinar la clase de esfericidad constante existente, o sea, si es o no euclideano plano el espacio, hemos tenido en cuenta lo siguiente:

$$ds^2 = \frac{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)\sum_i^n dx_i^2 - a\left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)^2}$$

que para

$$a = 0 \qquad \text{da} \qquad ds^2 = ds_0^2$$

y para

$$a = \pm\infty \qquad \text{da} \qquad ds^2 = 0,$$

entrevemos inmediatamente que la curvatura esférica afecta todas las magnitudes de una manera homogénea o igual, de suerte que siempre se conserva la relación de magnitudes, etc.

Lo que podemos apreciar o percibir son « las variaciones de curvatura esférica ». Este es el punto capital, y vemos la exacta analogía, con « la aceleración » en cinemática. Esta simple referencia ya puede servir como indicatriz de la senda que conduce a la gravitación de Einstein, como también puede servir para reducir a la realidad las predicciones de Clifford, o sea, « que nuestra fenomenología perceptible es variación continua de *curvatura* ».

DIGRESIÓN 0.675

Repitiendo

Haremos un breve resumen de lo expuesto en la digresión 0.67, y repetiremos los argumentos encarando el problema desde un punto de vista diferente.

Podemos deformar, continua y arbitrariamente, una superficie sin alterar la longitud de geodésicas, ni ángulos, ni áreas. En una palabra, podemos deformar continuamente sin alterar « la curvatura escalar » de la superficie. Hay que comprender esto completamente.

La característica de un movimiento uniforme es una traza geodésica, que conserva la dirección y la velocidad. La velocidad es la distancia recorrida en la unidad de tiempo, es, pues, « una propagación », una repetición básica. El fenómeno caracteriza un espacio libre en la forma conocida : no hay « fuerza » o « acción ». Es también característico de espacio plano afín euclideano.

Hagamos intervenir la noción de « densidad » y observamos que la característica anterior puede definirse así : una densificación kinética, de traza uniforme o constante, o sea una propagación, o repetición de la posición espacial, de carácter constante en un *continuum* espacial plano, o de esfericidad espacial nula.

Aparece ahora relacionado el *quantum* con el *continuum* y vamos comprendiendo intuitivamente el significado de una alteración del « estado espacial » como variante del « estado del *quantum* ». Notemos que la traza geodésica puede estar sobre una superficie (paramétrica) cualquiera, que persiste la característica del estado « libre » conocido y que ésta se conserva siempre que « se conserve la curvatura », o sea la estructura de la superficie.

Aplicamos todo esto al *continuum* espacial, como obra de generación paramétrica, y vemos que el espacio conserva su curvatura si conserva su estructura.

Ahora se ve claramente que estamos « jugando con órdenes de dimensiones ». Un *quantum* que repite su posición espacial uniformemente describe una geodésica en el *continuum* y esta geodésica será integralmente rectilínea si el *continuum* es un espacio esférico de curvatura = 0. Rectilínea, quiere decir « circular de curvatura cero ». La relación entre *quantum* y *continuum* es perfecta y está a la vista.

Se perfila admirablemente el fenómeno de « refracción » por efecto de alteración del estado espacial : alteración de la curvatura esférica. Todo espacio continuo puede concebirse esférico en sus elementos espaciales infinitesimales, tal como un elemento infinitesimal de curva, etc.

Decimos : alterar el carácter del fenómeno de movimiento, o densificación kinética del *quantum*, implica una alteración de la « densificación » en un orden mayor de dimensiones, o sea, alterar la estructura del *continuum* espacial, o alterar su curvatura. A esto queríamos llegar, pues de aquí ha de salir la explicación que no pudo formular W. K. Clifford.

« Densificar », analizado hasta su más simple expresión, es « alterar la distancia entre dos puntos del *continuum* ». Se desprende, pues, que una variación de « densidad » es una variación de estructura — o de curvatura, — es, pues, una variación de la forma métrica fundamental : una densificación infinitesimal. Toda variación de la disposición puntual que deja inalterada la forma básica métrica dejará inalterada la curvatura y, por lo tanto, a la densidad. Y ahora comprendemos el por qué de esas « rotaciones » que el sabio profesor H. Weyl estudia con el auxilio de matrices infinitesimales y que constituyen la característica de un espacio métrico pitagórico. Aparece claramente el significado de ese raciocinio matemático magistral.

Fluye, pues, que como un punto puede conservar « una distancia » por una rotación, puede así conservar una densidad y, por lo tanto, « un espacio puede conservar su curvatura ».

Pero todo esto lo está diciendo la forma métrica fundamental de Riemann :

$$ds^2 = \frac{\left(1 \pm a \sum_i^n x_i^2\right) \sum_i^n dx_i^2 \mp a \left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 \pm a \sum_i^n x_i^2\right)^2}$$

$a =$ curvatura esférica espacial

$$a = 0 \qquad ds^2 = ds_0^2 = \sum_i^n dx_i^2$$

y si

$$a = \pm \infty \qquad ds^2 = 0.$$

Visto esto, y comprendido su significado, comprendemos también lo que quiso decir W. K. Clifford cuando sentó lo siguiente : *On the space theory of matter.* (Leído el día 21 de febrero de 1870, en Cambridge y publicado en 1876.)

« Que esta variación de curvatura espacial es lo que realmente sucede en ese fenómeno que llamamos movimiento de materia, sea ponderal o eteriana.

« Que en el mundo físico nada más que esta variación tiene lugar sujeta *a la ley de continuidad.*

« Estoy, decía Clifford, ocupado en la tarea de explicar las leyes de doble refracción basándome en estas hipótesis, pero aún no he llegado a resultados determinados. » No podía formular su intuición, pero su intelecto comprendía que allí estaba la solución.

Clifford falleció a los 34 años.

Nosotros, gracias a Einstein, hemos podido continuar la obra y ahora tenemos conquistada una nueva altura, pero temblamos ante la nueva cumbre que se nos presenta por delante.

Siendo la repetición invariante y siendo el número su símbolo, vemos que propagación = velocidad de repetición por acción, o cosa densificada, es la piedra angular de todo el edificio geométrico-físico de nuestro universo perceptible y es preciso acoplar esto con nuestra percepción pura kinética, o visión (contar), y nuestra percepción pura dinámica, o tacto (medir). Repetir es densificar.

Densificar es dimensionalizar.

La fenomenología íntegra depende de la repetición como origen de la densidad, y esta densidad, como origen de la curvatura.

¡ Variaciones de curvatura ! he aquí encerrado el infinito fásico de la naturaleza, o universo perceptible.

Queda demostrada la invariación de la repetición (1).

DIGRESIÓN 0.´68

Especulación pura

Resulta claramente que un estado espacial es obra de una repetición : una propagación. Comprendemos así que nuestro *continuum*

(1) Comprendemos ahora que en la posibilidad de alterar la curvatura parcialmente en un *quantum* es donde estriba toda la fenomenología fásica que caracteriza al « *quantum* », especialmente (color, contextura, formación cristalina o amorfa, etc., o sea, las propiedades físicas del *quantum*). Pero alterar la curvatura íntegra del *quantum* es lo mismo que alterar la curvatura espacial del *continuum* que lo contiene, en su vecindad, o contacto.

mayor es obra del sol como generador, o « focalización ». He aquí, pues, como densificar es repetir una acción.

La curvatura espacial depende de la densificación infinitesimal y cualquier variación de ésta implica una variación de curvatura. Una variación de acción. Llamemos gravitación a esta acción.

Decimos ahora con Riemann que lo que no altera a ds^2 no alterará a la curvatura. *Mutatis mutandis,* la ley de variación de ds^2 por efecto de variación de curvatura es una ley de variación de densidad y, por lo tanto, es una ley de gravitación. Teníamos:

$$ds^2 = ds_0{}^2 - \mathbf{R}da$$

$$ds^2 - ds_0{}^2 = - \mathbf{R}da,$$

cambiando signo:

$$ds_0{}^2 - ds^2 = \mathbf{R}da$$

$$\delta\,(ds^2) = \mathbf{R}da,$$

si suponemos ds_0 unitario en P, podemos escribir:

$$\delta\,(ds^2) = 2\delta\,(ds),$$

o, si se quiere:

$$d^2s = \frac{1}{2}\mathbf{R}\,.\,da,$$

como ley de variación de curvatura. *Reconocemos una ley de « aceleración ».*

Si tenemos en cuenta el carácter radial simétrico esférico y estático, o estacionario, de la focalización solar, comprendemos inmediatamente como, dependiendo la aceleración de la variación de curvatura, y ésta de la variación de distancia al foco, será:

$$a = \frac{1}{\rho}$$

$$da = -\frac{1}{\rho^2}\cdot d\rho$$

que da la clave de la singular exactitud de la ley newtoniana de aceleraciones centrales: la ley de variación de curvatura espacial esférica aproximada.

Fácil es extender todo esto al concepto einsteiniano de relativismo.

general y descubrir que la hamiltoniana de acción material del campo de gravitación tiene que poseer la forma, sub-integral:

$$G = \frac{1}{2}\sqrt{g} \, . \, \mathbf{R} + \alpha$$

$$\mathbf{R} = g_{ii\,.\,kk} - g_{ik\,.\,ik} \qquad \alpha = \mathrm{div}$$

en un sistema normal geodésico.

DIGRESIÓN 0.69

Curvatura espacial esférica

Pensamos relacionar lo dicho en la digresión sobre número con lo establecido en las digresiones 0.67 y 0.675 sobre curvatura esférica, densificación y relativismo.

Con Riemann:

$$ds^2 = \frac{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)\sum_i^n dx_i^2 - a\left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)^2}$$

si

$$a = 0 \qquad ds^2 = ds_0^2 \text{ (euclideano)}$$

$$= \sum_i^n dx_i^2$$

si

$$a = \pm\infty \qquad ds^2 = 0$$

y no hay *quantum* posible.

Si $a = da$ es infinitamente pequeño

$$ds^2 = ds_0^2 - \mathbf{R}da$$

$$\mathbf{R} = \sum_{ik}^n x_i x_i dx_k dx_k - \sum_{ik}^n x_i x_k dx_i dx_k,$$

o con Einstein, linealizando en un sistema normal geodésico en $P(x_i)$

$$\mathbf{R} = g_{ii\,.\,kk} - g_{ik\,.\,ik}$$

en que reconocemos la conocida escalar de curvatura Riemann, y la hallamos así directamente por la sencilla razón de que, en general, todo

espacio continuo arbitrario es esférico en sus elementos espaciales infinitesimales. Así como toda línea es infinitesimalmente circular y toda superficie infinitesimalmente esférica. Etc.

De manera, pues, que un *quantum* cuyo campo métrico es el de

$$ds^2 = ds_0^2$$

para pasar a un espacio de esfericidad da tiene que experimentar la deformación estructural definida por la escalar:

$$\mathbf{R}da,$$

esto es:

$$(g_{ii.kk} - g_{ik.ik})\,da,$$

siendo la parte determinante del fenómeno de alteración de densificación:

$$\mathbf{R} = (g_{ii.kk} - g_{ik.ik}).$$

Consecuencia: un *quantum* en libertad conserva su curvatura espacial esférica.

No puede cambiar libremente su ambiente espacial un *quantum* por otro de diferente curvatura, porque tiene que cambiar de estructura, es decir, alterar su densificación, o si se prefiere, *cambiar de gravitación cohesiva.*

Esto es lo que significa cambiar de forma métrica fundamental.

Queda, pues, descubierta la ley a la cual se hizo referencia en la digresión sobre el número, o sea, la ley de distribución grupal en una propagación.

Aventuramos añadir que es en la variación relativa de curvatura espacial superpuesta a pura rotación que se halla la explicación del fenómeno llamado movimiento. Sin rotación, tendríamos el fenómeno perceptible de « distancia », o el fenómeno espectral conocido, etc.

La curvatura esférica borra los órdenes de magnitudes, como evidencia la expresión matemática. Aquí, pues, reside la explicación íntegra de la óptica. Ejemplo: una esfera desaparece « visualmente » como un punto.

Un plano desaparece « visualmente » como una esfera cuando conserva la posición normal al radio visual, y así es un caso particular del anterior.

En una superficie esférica cuyo centro es nuestro órgano visual y cuyo radio aumenta indefinidamente desaparecen simultáneamente todos los puntos a la vez.

Dos puntos, según el orden de su magnitud y de su distancia, desaparecerán como dos puntos, o como uno solo. Aquí tenemos la explicación del desmembramiento, o la desaparición de *quanta,* por las orillas, etc., etc.

Se desprende, pues, y siempre deberá tenerse en cuenta que nuestra visión engloba: órdenes de magnitud visible, órdenes en el límite de visión y órdenes que se borran. Profundizando esto es que se comprenden las características ópticas de los *quanta.*

Biología matemática. — Una célula es un *quantum* y, como tal, conserva su ambiente espacial esférico. Para cambiar tiene que alterar su estructura o densificación.

Dejamos esto acá (1).

DIGRESIÓN 0.70

Einstein

Una de las pruebas que más nos asombran del talento matemático de Einstein está en su descubrimiento de la función

$$G = \frac{1}{2}\sqrt{g} \cdot \mathbf{R} + \lambda,$$

en la que **R** es la escalar de curvatura Riemann y λ una divergencia.

Quiere decir, que G es la única función que contiene los coeficientes de la forma métrica fundamental, expresadas por primeras y segundas derivadas, y las últimas linealmente.

(1) Es preciso tener siempre presente que en la forma fundamental riemaniana

$$ds^2 = \frac{ds_0^2 + da \left\{ \sum_i^n x_i x_i dx_k dx_k - \sum_i^n x_i x_k dx_i dx_k \right\}}{(1 + da \sum x_i^2)^2}$$

los (x_i) son « parámetros », que pueden equipararse por analogía, para los efectos de fijar ideas solamente, a los (u_i), en la forma esférica

$$ds^2 = \frac{(1 + u_1^2 + u_2^2)(du_1^2 + du_2^2) - (u_1 du_1 + u_2 du_2)^2}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2},$$

donde (u_1 y u_2) son parámetros que sirven para formular la correspondencia plana, etc.

Los (x_i) como los (u_i) son arbitrarios y elegibles, *ad libitum, y son infinitesimales.*

¡ Puro raciocinio matemático!

Ya se ha hecho constar en otro lugar que es difícil rehuir la convicción de que Einstein llegó a la meta, empezando por «el fin buscado» y remontando en sentido inverso, en la demostración de su exactitud.

Quiere decir, que, admitiendo un espacio esférico constante en sus elementos infinitesimales y, por lo tanto, que:

$$\mathbf{R} = g_{ii.kk} - g_{ik.ik}$$

en que

$$g^{ik} g_{ik} = g_{ik} g_{ik} = 1$$

y

$$\frac{d^2 g_{ik}}{dx_r dx_s} = g_{ik.rs} = g_{ik.sr}, \text{ etc.,}$$

remontó por linealizaciones, normales geodésicas, a

$$\mathrm{J} = \sum \lambda_{ik.rs} g_{ik.rs} + \lambda,$$

en que los λ son construídos con los g_{ik} y sus primeras derivadas.

DIGRESIÓN 0.71

Curvatura espacial. Espacios esféricos

Teníamos con Riemann:

$$ds^2 = \frac{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)\sum_i^n dx_i^2 - a\left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + a\sum_i^n x_i^2\right)^2},$$

y para una forma esférica infinitesimal:

$$ds^2 = \sum_i^n dx_i^2 - da \left\{ \sum_{ik}^n x_i x_i dx_k dx_k - \sum_{ik}^n x_i x_k dx_i dx_k \right\} = ds_0^2 - \mathbf{R} \cdot da.$$

Descomponiendo la cuadrática en sus factores escalares

$$(ds \cdot ds) = (ds_0 \cdot ds_0) - \mathbf{R} \cdot da$$

$$\mathbf{R} = \sum_{ik}^n (x_i dx_k)(x_i dx_k) - \sum_{ik}^n (x_k dx_i)(x_i dx_k) = \sum_{ik}^n (x_i \cdot dx_k)\left[(x_i dx_k) - (x_k dx_i)\right].$$

Vemos, en consecuencia, que $\mathbf{R} = 0$, si se tiene :

$$x_i dx_k - x_k dx_i = 0$$

$$x_i dx_k = x_k dx_i$$

$$\gamma_{ik} = \gamma_{ki}.$$

La condición de esfericidad nula es, pues, que no haya rotación, esto es : espacio plano euclideano.

Cuando hay rotación, hay curvatura esférica y hay deformación estructural en el *quantum*.

Se ve, pues, que cuando no hay rotación no hay curvatura espacial perceptible, y el *quantum* se confunde con el *continuum* espacial que lo contiene. Llamemos esto *una disolución eutéctica,* por la sencilla razón que es independiente del *da*.

Si la curvatura espacial es nula y $da = 0$, entonces, el *quantum,* o los *quanta,* existen en un estado de « indiferencia », sumergidos en un espacio sin cohesión y es sobre esta base que Einstein desarrolla su teoría de gravitación solar, esto es : *el espacio continuo, sin cohesión,* responde exacta y directamente a la acción de cualquier *quantum* (sol) que contiene.

Cuando hay rotación y

$$\mathbf{R} \neq 0$$

estamos en el caso maravillosamente interesante de « nuestro mundo perceptible ». *¡ Nuestras percepciones respondiendo al factor da !* Y el doctor David Hartley, a mediados del siglo XVIII, predicaba al mundo científico que : las sensaciones obedecen a simples vibraciones que, focalizadas en el cerebro, determinan *un cambio de temperatura !* La resonancia térmica asomaba intuitivamente en la mente del sabio médico inglés, como origen de deformaciones, *que alteraban una densidad básica,* es decir, una estructura *quántica* espacial, o sea, una curvatura esférica; y alterada la forma métrica, una deformación continua mayor espacial *provoca la eferencia* y la estratificación precaria. ¿ Cuál es esa deformación continua mayor espacial ? Simplemente, el campo solar ambiente. ¿ Cuál es la densidad escalar básica ? El *cerebro :* llámesele *neurón,* o cualquier otra cosa.

Quiere decir, sencillamente, que la observación induce a sentar que *da* es un factor de resonancia, y R la « divergencia de estabilidad » del *quantum*. Teniendo R aspecto de « acción centrífuga unitaria ».

Cualquiera puede ver que si un *quantum* perceptible existe sumer-

gido en un espacio esférico constante, existirá reaccionando contra el ambiente, por efecto de densificación o diferencia de curvatura. Llamemos presión este efecto. Si ahora, una causa altera la curvatura espacial, es natural que el *quantum,* interior, responderá matemáticamente; esto es, si la causa es dirigida, el *quantum se moverá,* tratando de conservar « un estado » de equilibrio, que vectorialmente podría representarse como una equipotencial

$$\text{grad } \varphi = \text{constante.}$$

Es así, cómo Clifford quería explicar el fenómeno perceptible de movimiento y, es así, cómo trabaja la naturaleza en la obra de evolución, etc.

Distancia. — Para poder formar un concepto claro de lo que significa esta percepción, sugerimos el siguiente efecto esquemático.

Un *quantum* sumergido en un espacio esférico, produce una impresión visual, como ya se ha explicado. Al moverse (uniforme) el *quantum no cambia su estado espacial, lo que cambia es la curvatura esférica en la focalización cerebral* y este fenómeno es el que origina la *sensación de distancia.* Quiere decir, muy simplemente, que un *quantum* podría estar en reposo « dinámico » respecto a nuestra persona, y una causa alterar la impresión óptica de tal manera que tendríamos toda la sensación de distanciamiento, o sea alejamiento o acercamiento, etc. No habría más que añadir: rotación axial de nuestra persona para producir *todo el efecto de movimiento espacial.* Tal es el significado de « nuestra perceptibilidad » y su relación con el exterior.

DIGRESIÓN 0.72

La materia

Especulación matemática. — Curvatura esférica o densificación infinitesimal. — Triunfo de Riemann y W. K. Clifford. — Sir Isaac Newton. — Alberto Einstein. — Niels Bohr.

Hemos cansado al lector con fraseología matemática y filosofía. Pasamos ahora a la consideración de la verdad absoluta, o sea, la descripción matemática de una dimensionalización.

Para resolver el problema de la materia como *quantum* perceptible o densificación infinitesimal, en un *continuum* mayor, partimos de la

ecuación fundamental de Riemann, tan conocida ya, y tan fácil de deducir por generalización de una paramétrica plano-esférica:

$$ds^2 = \frac{\left(1 + a \sum_i^n x_i^2\right) \sum_i^n dx_i^2 - a \left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + a \sum_i^n x_i^2\right)^2}.$$

Surgiendo de una condición euclideana plana la densificación, y siendo un proceso infinitesimal de « apilamiento puntual » en ese espacio homogéneo, sin cohesión, tenemos fácilmente:

$$ds^2 = \frac{\left(1 + da \sum_i^n x_i^2\right) \sum_i^n dx_i^2 - da \left(\sum_i^n x_i dx_i\right)^2}{\left(1 + da \sum_i^n x_i^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\sum_i^n dx_i^2 - da \left\{ \sum_{ik}^n x_i x_k dx_i dx_k - \sum_{ik}^n x_i x_i dx_k dx_k \right\}}{\left(1 + da \sum_i^n x_i^2\right)^2}.$$

Si partimos del espacio plano, se tiene

$$ds^2 = \sum_i^n dx_i^2 = ds_0^2.$$

Así, pues:

$$ds^2 = \frac{ds_0^2 - \mathbf{R} . da}{\left(1 + da \sum_i^n x_i^2\right)^2},$$

$$\mathbf{R} = \sum_{ik}^n x_i x_k dx_i dx_k - \sum_{ik}^n x_i x_i dx_k dx_k.$$

Si ahora tenemos presente que un *quantum* sólo puede densificarse en una forma infinitesimal y continua, esto es, pasar en el espacio del estado plano euclideano al estado esférico infinitesimal *constante* por deformación continua estructural de densidad, y así pasar de una forma métrica a otra forma métrica diferente, vemos inmediatamente que el proceso analítico tiene que reducirse al « módulo **R** », así:

$$\text{límite } (1 + da \sum x_i^2)^2 = 1$$

$$ds^2 = ds_0^2 - \mathbf{R} da$$

$$\frac{ds_0^2 - ds^2}{da} = \frac{\partial (ds^2)}{da} = \mathbf{R},$$

y si aplicamos una densidad básica del *continuum* espacial homogéneo, y unitario:

$$|g_{ik}| = g \qquad \text{la Jacobiana}$$

$$\sqrt{g} \cdot \frac{\delta (ds^2)}{da} = \sqrt{g}\mathsf{R} = \mathrm{R},$$

lo cual quiere decir que R tiene aspecto de un módulo transformador de densidad escalar. Siempre hay que tener presente que operamos en un elemento infinitesimal espacial, y que dentro de este elemento *la transformación es uniforme, o constante.* Quiere decir, que la curvatura esférica varía sólo de un elemento espacial al vecino y es *constante* en todas direcciones dentro de un elemento determinado, o en un punto $P = (x_i)$.

Es muy sencillo hacer el proceso mental que nos conduzca al concepto de propagación paralela de Levi-Civita y después, con el auxilio del teorema de Stokes, obtener una forma analítica para este módulo escalar R de curvatura. Ya hemos visto en otro lugar como se hace, y no hay para qué repetirlo acá. Pasemos ahora a estudiar el significado de un espacio euclideano plano, desde el punto de vista de densificación cero, o mínima. El procedimiento es sencillo.

Escribamos:

$$\frac{\delta (ds^2)}{da} = \mathsf{R},$$

si buscamos un máximo tendremos:

$$\frac{\delta (ds^2)}{da} = 0 \qquad \text{o} \qquad \mathsf{R} = 0$$

$$\sum_{ik}^{n} x_i x_i dx_k dx_k = \sum_{ik}^{n} x_i x_k dx_i dx_k$$

y

$$ds^2 = ds_0^2 = \sum_{i}^{n} dx_i^2;$$

la segunda derivada se obtiene fácilmente si

$$P = \sum_{i}^{n} x_i^2; \qquad Q = \sum_{i}^{n} dx_i^2; \qquad S = (\sum x_i dx_i)^2;$$

$$ds^2 = \frac{(1 + aP)\,Q - aS}{(1 + aP)^2}$$

$$ds^2 (1 + aP)^2 = (1 + aP)\,Q - aS$$

$$\frac{\partial (ds^2)}{da}(1 + a\mathrm{P})^2 + 2ds^2(1 + a\mathrm{P})\,\mathrm{P} = \mathrm{PQ} - \mathrm{S}$$

$$\frac{\partial^2 (ds^2)}{da^2}(1 + a\mathrm{P})^2 = -2ds^2\,\mathrm{P}^2 - 2\frac{\partial (ds^2)}{da}(1 + a\mathrm{P})\,\mathrm{P};$$

si

$$\frac{\partial (ds^2)}{da} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 (ds^2)}{da^2}\right)_0 = -2\left(\frac{ds\,.\,\mathrm{P}}{1 + a\mathrm{P}}\right)^2 < 0,$$

quiere decir que

$$ds_0^2 = \sum_i^n dx_i^2$$

es un máximum; que ya lo sabíamos geométricamente.

Comprendemos, por este resultado, que en un espacio plano euclideano de esfericidad cero no sería posible fijar la forma métrica fundamental y, por lo tanto, predomina *la condición absoluta de indeterminación métrica,* o sea *el continuum homogéneo*

$$ds^2 = ds_0^2,$$

pudiendo ser ds^2 cualquier cosa.

El límite opuesto de curvatura esférica infinita nos conduce al *solidum puntual,* o a la *absoluta rigidez* de la mecánica clásica, y *dentro del cual no hay forma métrica posible.* Esto es:

$$ds^2 = 0 \qquad \text{para} \qquad a = \pm\infty.$$

El paso, pues, de una curvatura esférica infinitesimal a la curvatura cero, es seguida por la deformación de densificación estructural:

$$\frac{\partial (ds^2)}{da} = \mathbf{R} = \sum_{ik}^n x_i x_i dx_k dx_k - \sum_{ik}^n x_i x_k dx_i dx_k,$$

o linealizando:

$$\mathbf{R} = g_{ii\,.\,kk} - g_{ik\,.\,ik}.$$

Una densidad $\sqrt{g}$ se transforma, pues en

$$\sqrt{g}\mathbf{R} = \mathrm{R},$$

que nos da la expresión de densificación infinitesimal.

Dejando de lado el signo de suma, que queda sobreentendido, podemos escribir:

$$\mathrm{R} = \sqrt{g}\,(x_i x_k dx_i dx_k - x_i x_i dx_k dx_k),$$

en que ajustamos el signo convenientemente al proceso de densificación:

$$R = \sqrt{g}\,(x_i dx_k)\,(x_k dx_i - x_i dx_k).$$

Consideremos ahora lo siguiente:

$$\frac{\partial\,(ds^2)}{da} = \mathbf{R},$$

omitiendo densidad $\sqrt{g}$.

$$ds^2 = ds_0{}^2 - \mathbf{R}da$$

$$\frac{ds^2}{ds_0{}^2} = 1 - da\left\{\sum_{ik}^{n} x_i x_k \frac{dx_i}{ds}\cdot\frac{dx_k}{ds} - \sum_{ik}^{n} x_i x_i \frac{dx_k}{ds}\cdot\frac{dx_k}{ds}\right\}$$

$$\mathbf{R}_1 = \left(x_i \frac{dx_k}{ds}\right)\left(x_k \frac{dx}{ds} - x_i \frac{dx_k}{ds}\right).$$

Vemos ahora, inmmediatamente, que si

$$\left(x_i \frac{dx_k}{ds}\right) = 0$$

o

$$\left(x_k \frac{dx_i}{ds} - x_i \frac{dx_k}{ds}\right) = 0$$

no habrá densificación y dejamos al lector interpretar el significado manifiesto de esto. Pero si

$$x_k \frac{dx_i}{ds} - x_i \frac{dx_k}{ds} \neq 0$$

tendremos *densificación infinitesimal.*

Vemos, pues, cómo nacen las dimensiones espaciales en un *continuum* homogéneo puntual euclideano. Sabemos que en el elemento espacial infinitesimal tendremos un módulo escalar R, que es constante. Así, pues:

$$\left(x_i \frac{dx_k}{ds}\right)\left(x_k \frac{dx_i}{ds} - x_i \frac{dx_k}{ds}\right) = \text{constante},$$

pero, si nos fijamos, esta suma se resuelve en una canónica cuadrática de elementos

$$\left(x_\alpha \frac{dx_\beta}{ds} - x_\beta \frac{dx_\alpha}{ds}\right)^2$$

y si aplicamos en el elemento infinitesimal espacial la condición hamiltoniana estacionaria, tendremos:

$$\delta' \left(x_\alpha \frac{dx_\beta}{ds} - x_\beta \frac{dx_\alpha}{ds} \right)^2 = 0$$

para cada término, o sea:

$$x_\alpha \frac{dx_\beta}{ds} - x_\beta \frac{dx_\alpha}{ds} = \text{constante},$$

que es la conocida *ley de áreas*. Esta, pues, es la transformación que hace nacer el *quantum*. Por otra parte tenemos

$$da = \text{div. de curvatura}$$

$$= \text{div. de densidad de } (a = 0),$$

por lo tanto, podemos escribir:

$$da = \text{resonador},$$

esto es, *da* es el elemento que traduce el efecto espacial exterior *al quantum*, o viceversa, del *quantum* al ambiente espacial.

Un *quantum* perceptible (imaginariamente) es, pues, un sistema solar infinitesimal. Quiere decir que, efectivamente, *la gravitación dimensionaliza, o densifica.*

Es así que comprendemos que nuestro universo perceptible es un *continuum* de repetición y que la diferenciación fásica estriba en el principio de focalizaciones, o «apilamientos». Quiere decir, que la continuidad está sujeta a órdenes de densificación, que podríamos denominar «pesos de la base» en el sentido de ser

$$10^n,$$

n = peso, y 10 el «apilamiento». Hay, pues, diferentes clases de continuidad, como hay diferentes clases de afinidad en un espacio euclideano, o como hay diferentes clases de curvatura esférica, etc.

El *quantum* posee una base con una característica de peso, y si se ha podido penetrar el alcance de lo establecido en la digresión «número», se verá cómo sucede el fenómeno de desintegración de la materia por efecto de «resonancia de gravitación» y cómo *un quantum se disuelve en el continuum espacial esférico que lo contiene,* que puede ser un *quantum* a su vez en otro *continuum* mayor, etc.

Se observará la analogía completa entre el significado de «peso

de la base» y el «peso de una densidad tensorial» de H. Weyl, naciendo este concepto matemático con Cayley y Sylvester en sus «pesos de invariantes».

Podríamos muy bien hacer un parangón entre el resonador de curvatura esférica espacial *da* y la psicología orgánica, diciendo que *da* es el sentido y R_1 el *sensorium* del sér consciente.

Resumiendo: Riemann y Clifford nos han conducido al encuentro de Newton y Einstein, e incidentalmente hallamos a Niels Bohr, Moseley y Planck en la vecindad. A Bertrand Russell lo vimos en el camino.

El principio de transporte paralelo de Levi-Civita no es más que una perífrasis matemática del principio general de «la esfericidad constante espacial en sus elementos infinitesimales».

La teoría del relativismo general de Einstein, y su admirable término cosmológico, no es más que la expresión de la transformación de los *quanta*

$$\frac{ds^2}{ds_0^2} = 1 - \mathbf{R}_1 da,$$

y

$$\mathbf{R}_1 = \text{constante}$$

encierra toda la teoría de gravitación.

Nuestras percepciones nacen de la imperceptibilidad (igualdad), de la misma manera que los astros en el firmamento.

Terminamos, como hemos empezado, sentando que, todo, absolutamente todo, es repetición. ¡Somos un *continuum* de repetición!

El misterio es el siguiente: podemos decir y concebir:

Uno, uno, uno, ..., *ad infinitum*

y también podemos decir y comprender:

Dos, dos, ..., *ad infinitum.*

¡Densificamos! Reconocemos lo asombroso de este fenómeno mental. *Apilamos. El dos sale de golpe de nuestro cerebro. ¡Mirabile dictu!*

Si, pues, nuestro cerebro puede engendrar ese *dos,* entonces, en su desintegración está el fenómeno de la materia y de la evolución. ¿Qué es, pues, nuestro cerebro? Una focalización; como si dijéramos: un sol (1).

(1) Opinión humilde del autor: una densidad puntual huye ante una deformación esférica espacial, por resistir el cambio de su forma métrica fundamental. Huye ante una acción de repetición que emana de una focalización y así consti-

DIGRESIÓN 0.73

Tensores. Propagaciones. Luz blanca

Rememoremos un poco las «linealizaciones».

Si tenemos:

$$X = \xi^1 l_1 + \xi^2 l_2 + \ldots + \xi^h l_h + \ldots = \sum_i^n \xi^i l_i$$

se ve que para asimilar una linealización a una propagación, o repetición, tenemos que suponer:

$$(\xi^i) = \text{repetición temporal} = \text{frecuencia;}$$

$$l_i = \lambda_i = \text{repetición espacial} = \text{longitud de onda;}$$

podríamos decir $\xi^i = v^i =$ densidad unitaria de la repetición en tiempo, y $\lambda_i =$ densidad unitaria de la deformación espacial. Aparece así X como una densidad escalar de propagación, de base X; tratándose de un *continuum* homogéneo, o isótropo.

Pero podemos hacer corresponder a cualquier linealización X otra arbitraria, valiéndonos de las conocidas propiedades de funciones homogéneas. Si L representa una función cualquiera, y L (X) toma todos los valores reales, resultantes de hacer recorrer a X todos los valores posibles, tendremos una forma lineal en L (X) si

$$L(x + y) = L(x) + L(y), \qquad L(\alpha x) = \alpha L(x),$$

como bien sabemos. Reconocemos, pues, en L (X), una forma lineal, exactamente como una componente ξ^i de un vector en la forma

$$\sum_i^n \xi^i l_i = X.$$

Llamemos, pues, esto: *una linealización a base de la frecuencia de repetición.*

tuye «la eferencia espacial». ¿Por qué? Por la ley de conservación del espacio, o conservación de la curvatura, etc. *Natura non facit saltum*. Está a la vista el por qué; la aplicación es universal. ¿Qué es, pues, un neurón? ¿Cómo se explica la focalización en el cerebro de «las sensaciones»? ¿Cómo se explica la densificación de nuestro cuerpo? Matemáticamente, de la manera más sencilla, pero... queda el misterio de la repetición.

Pasemos ahora a considerar una linealización a base de los (e_i) fundamentales. Si

$$L(X) = \xi^i L(e_1) + \xi^2 L(e_2) + \ldots + \xi^i L(e_i) + \ldots$$

por definición; poniendo $a_i = L(e_i)$;

$$L(X) = \sum_i^n \xi^i a_i,$$

y tenemos un tensor de componentes (a_i), como ya hemos visto con Weyl. Descúbrese así el mecanismo del «tensor». Apliquemos esto ahora, en la forma harmónica, para descubrir la naturaleza de la luz blanca y así terminar con el dilema de Gouy, Schuster, Gorlasso, Rayleigh, etc.

Pero nos olvidamos de repetir que si

$$\lambda_1 L_1(X) + \lambda_2 L_2(X) + \ldots + \lambda_n L_n(X) \neq 0$$

no se anula, excepto para $\lambda_i = 0$ tendremos *una forma lineal.* Los (λ_i) son componentes de un tensor, etc.

Obsérvese ahora que $L_i(X)$ varía de una manera continua cuando X varía de una manera continua. Quiere decir que si

$$A = \sum_i^n \lambda_i L_i(X)$$

$$B = \sum_i^n \lambda_i \mathsf{L}_i(X)$$

$$C = \sum_i^n \lambda_i \Lambda_i(X),$$

son tres formas ligadas por el vínculo de (λ_i) común (un tensor), tenemos simbolizadas tres formas de propagaciones *a densidad espacial común, pero de diferentes frecuencias.* Podríamos bien decir que en un *continuum* homogéneo estas tres propagaciones difieren por «la frecuencia», teniendo común la longitud de onda. Implica, pues, tres propagaciones de densidades básicas, A, B, C, diferentes por diferencia de frecuencia solamente. Si quisiéramos interpretar eléctricamente, diríamos que estas propagaciones difieren por concepto de densidad de corriente.

Fijémonos ahora en lo siguiente: si

$$A = \xi\lambda$$

en un *continuum* homogéneo, tendremos naturalmente por isotropía :

$$A = \xi^1\lambda_1 + \xi^2\lambda_2 + \ldots + \xi^h\lambda_h + \ldots$$

en que

$$\text{val. abs.} \, |\lambda_1| = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_h| = \ldots,$$

o sea, las densidades básicas son iguales en valor absoluto en todas direcciones (curvatura constante). Ahora, si

$$A = \text{número primo}$$

es evidente, que siendo

$$A = \xi\lambda$$

será

$$A = \sum_i^n \xi^i\lambda_i \qquad |\lambda_i| = |\lambda_k|.$$

Ahora, si suponemos *una frecuencia unitaria única común en el continuum homogéneo, será a fortiori :*

$$\xi^i = 1 = \text{constante}$$

y

$$\text{val. abs.} \, |\lambda_i| = |A| = \text{constante} = \text{número primo},$$

y esto nos dice que : en un *continuum* homogéneo las propagaciones a densidades, o *bases indivisibles*, o sea *números primos, difieren entre sí por concepto de potencia dinámica, cuando la frecuencia es común, o constante.*

Siendo debida la diferencia de velocidad de propagación a diferencia de longitud de onda, *en igualdad de frecuencia*. Decimos, pues, que estas propagaciones son *monocromáticas*, o sea, *indescomponibles por prismas,* etc.

Ahora, supongamos que una propagación tenga una base, o densidad escalar, que puede ser descompuesta en factores varios, primos, o sea, un número divisible en factores primos. A una frecuencia común 1 en un *continuum* isótropo, u homogéneo, corresponderán tantas linealizaciones como factores primos, a saber :

$$A = \sum_i^n \xi^i (A_1 + A_2 + A_3 + \ \ldots \ + A_n)_i$$

$$A_1 = \sum_i \xi^i (A_1)_i \ \ldots$$

$$A_2 = \sum_i \xi^i (A_2)_i \ \ldots \ A_n = \sum_i \xi^i (A_n)_i$$

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_i \xi^i (A_1)_i + \ldots + \sum_i \xi^i (A_n)_i = \sum_{ik} \xi^i (A_k)_i,$$

$$k = 1, 2, \ldots, m, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

donde reconocemos la división espectral en ondas monocromáticas, o indivisibles, a frecuencia de focalización común. ¿ Puede haber algo más sencillo que esto ? ¿ Por qué ? Porque nuestro *continuum* mayor perceptible es un *continuum* de repetición y el símbolo de repetición es número.

Comprendido lo anterior, sugerimos su aplicación a los « pesos atómicos » como *números primos indivisibles.*

El misterio es la repetición. Esto es, la acción mediante la cual podemos decir : dos, tres, mil, ..., o sea focalización y apilamiento.

Reflexiónese : podemos de un solo golpe decir y tener conciencia de ¡ mil ! o, si se quiere, ¡ dos ! *¡ Mirabile dictu !* Quiere decir que nuestro cerebro tiene la propiedad de un sol.

Por aferencia focalizamos y, por eferencia lanzamos ese mil. Al decir mil hemos apilado mil unidades en sucesión continua. La discreción es, pues, *mil,* en el concepto Riemann.

Filosofía. — Hemos observado que la materia aparece densificándose de la misma manera que un astro, es decir :

$$\frac{ds^2}{ds_0^{\,2}} = 1 - \mathsf{R}_1 \,.\, da$$

$$\mathsf{R}_1 = \sum_{ik}^{n} x_i x_k \frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} - \sum_{ik}^{n} x_i x_i \frac{dx_k}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds},$$

de donde

$$x_\alpha \frac{dx_\beta}{ds} - x_\beta \frac{dx_\alpha}{ds} = \text{constante}$$

nos da el plano orbital, etc., y descubrimos que el cerebro focaliza como lo hace un sol; es natural hacer la inferencia que *nuestro sol focaliza por aferencia estelar y densifica por eferencia luminosa,* o sea la gravitación luminosa, o densidad escalar constante *c,* de Einstein. Decimos, pues, en vista de esto, que si nuestra tierra se densifica, o disuelve, bajo el efecto solar, entonces, *su superficie debe ser una réplica recíproca de la aferencia solar, y así conserva una relación con la configuración estelar del continuum mayor, exactamente como el cuerpo*

humano relativamente a las acciones exteriores que penetran y se focalizan en el cerebro, produciendo en seguida la densificación por eferencia esférica, lo cual hace que el cuerpo sea la historia perceptible de nuestro universo perceptible. Esto es repetición *ad infinitum.*

DIGRESIÓN 0.735

Punto

Es bueno recordar la definición que da Riemann de un *quantum,* o sea un *continuum* limitado. También conviene recordar lo dicho acerca de órdenes de magnitudes, esto es : que nuestras percepciones son continuas, y que sólo el orden conciente de las mismas es limitado, al que llamamos « orden finito ».

¿ Qué es un punto ? Si encaramos la cuestión desde la base establecida de órdenes de magnitudes y nos concretamos al fenómeno cerebral físico-geométrico, tendremos, *a fortiori,* que modificar muchísimo la enseñanza del aula : la clásica definición de « ausencia de dimensiones ». Tiene considerable importancia este nuevo concepto, y podríamos decir, tanta importancia como la definición de número como símbolo de repetición. Es necesario, pues, profundizar y dejar resuelto el problema sobre la base invariante de la repetición. Dejaremos de lado el estudio detallado de la composición de una dimensionalización, que ya se ha tocado en otro lugar, y sólo nos concentraremos sobre el fenómeno de repetición que caracteriza a nuestro universo perceptible. Cuando un *quantum* desaparece como orden finito consciente de percepción, desaparecen todas sus dimensiones a la vez. y no aisladamente. *Mutatis, mutandis,* cuando un *quantum* asoma al orden finito consciente de percepción lo hace con todas sus dimensiones, sin distinciones, etc.

Recordemos lo siguiente :

1° Nuestro universo perceptible es un *continuum* de repetición, en que los fenómenos se repiten en todos los órdenes posibles de magnitudes ;

2° Que las variaciones fásicas que observamos en estas repeticiones, entre dos órdenes diferentes de magnitudes, se deben al principio conocido de indeterminación, introducida por integración desde un orden infinitesimal a un orden finito consciente de magnitudes, las cuales englobamos en constantes de integración ;

3° Que la repetición excluye la posibilidad de coincidencia y así, obliga al apilamiento, o la propagación;

4° Que en vista de todo esto, nuestras percepciones son continuas, y se inician en un límite inferior « cero », de existencia puntual; aumentando de intensidad hasta asomar al orden finito consciente de magnitudes.

Definimos, pues, un punto diciendo: un punto es la traza límite, u horizonte divisorio entre dos órdenes consecutivos de magnitudes.

Quiere decir que un punto es el *quantum* mínimo en un orden cualquiera de perceptibilidad consciente de magnitudes y el *maximum* dimensional en el orden inmediato inferior de perceptibilidad inconsciente. Esto es, siendo un cero dimensional en un orden de magnitudes, es un *continuum* ilimitado en el orden infinitesimal inmediato inferior de magnitudes. La repetición es manifiesta.

Pero nosotros numeramos con coordenadas simbólicas de repeticiones a todo punto de un *continuum,* con lo cual dejamos claramente establecido (intuitivamente hasta ahora) su carácter de ser una focalización. Si

$$P = (x_i) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

o sea

$$P = (x_1, x_2, x_3, ..., x_h, ..., x_n).$$

Vemos que los números arbitrarios x_1, x_2 ..., son símbolos de repeticiones, lo cual implica que P es una focalización de repeticiones, caracterizadas en densidad escalar (o peso) por los $x_1, x_2, ..., x_n$. Cuando transformamos coordenadas, alteramos el carácter del punto, o focalización, como es evidente, lo cual es lo mismo que decir: *deformamos al punto.*

¡Deformar un punto! Fácilmente nos damos cuenta que el significado se descubre, precisamente, en el hecho de ser un punto un *continuum,* a su vez, en un orden determinado inferior de magnitudes. La repetición está a la vista, nuevamente. Si suponemos al *continuum,* cualquiera que sea el orden de sus magnitudes máximas, poblado de cerebros humanos imaginarios, podemos sentar la existencia, siempre, de un orden finito consciente de percepciones dentro del mismo. Este concepto es muy práctico y útil. Manifiestamente, la deformación de un punto está dirigida por acciones exteriores, desde cero hasta el mismo orden de magnitudes que aquel que comprende a su finito consciente *sui generis.* Quiere decir que en un *quantum* cualquiera se repiten los fenómenos cerebrales del nuestro mayor.

Si, pues, un punto puede tener todas las formas imaginables, conceptuado como un *continuum*, y estas formas pueden variar indefinidamente guiadas por acciones exteriores, comprendemos que un apilamiento de puntos, o sea una densificación, es obra exclusiva de dos órdenes de magnitudes de acciones exteriores, a saber : 1° un orden igual al de « perceptibilidad finita consciente », *sui generis,* del *continuum*-punto ; y 2° un orden inmediato superior al anterior.

Quiere decir que, en virtud de un orden de acciones, *adquiere forma el punto* y en virtud del orden inmediato superior de acciones *adquiere forma el apilamiento puntual, o densificación integral.* Esto está ilustrado en aquel clásico ejemplo de la marcha en línea recta sobre un elemento plano en un orden de magnitud y la descripción de una geodésica orbital en otro orden superior, etc.

Fijémonos ahora con especial atención en el hecho siguiente : las acciones que penetran dentro del punto son de un orden inferior de magnitudes a las que obran sobre el punto como entidad global, entendiéndose dos órdenes sucesivos de magnitud. De esto sigue que tenemos dos fenómenos geométricos que considerar — solamente dos — a saber : 1° la densificación dentro del punto, como focalización, por efecto de aferencias de acciones de un orden máximo determinado de magnitud ; 2° el efecto de *las eferencias compuestas* sobre los puntos vecinos, o focalizaciones vecinas. Son, pues, las eferencias compuestas de la focalización, que por pertenecer a un orden inmediato superior de magnitudes *(a fortiori), determinan los fenómenos de dimensionalización,* o de comportamiento general. Vemos que a toda variación de aferencia corresponderá una variación de eferencia en algún orden de magnitud y, por lo tanto, una alteración de configuración del *quantum ;* y a esto lo hemos ya llamado : *infinita sensibilidad, o perceptibilidad continua.*

Una propagación tiene lugar como resultado de una eferencia compuesta, y esto equivale a decir que una densificación sobreviene por efecto de una aferencia compuesta, etc. Nuestro universo aparece nuevamente como un *continuum* de repetición, y de una manera que asombra. Vemos que un punto, siendo una focalización de repeticiones, desempeña el mismo rol básico que un *continuum* cerebral. Sólo difiere por orden de magnitud del nuestro, finito perceptible consciente, y por este concepto es que difiere fásicamente. Como si dijéramos por arbitrariedad de una constante de integración.

Al numerar un punto

$$P = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_h, \ldots, x_n),$$

no hacemos más que fijar sus «sentidos», simbolizando los números: densidades escalares. Pues la densificación interna del punto, la eferencia, la deformabilidad e infinita perceptibilidad, no son otra cosa que: una repetición del fenómeno básico cerebral en otro orden de magnitudes. Llegamos así a la noción de *la continuidad de existencias,* o sea, *de los diferentes órdenes de conciencia.* Quiere decir que la vida, en un orden cualquiera de *quantum* sensible, origina en una focalización y evoluciona por medio de aferencia y eferencia continua hasta un límite determinado de densificación, cesando el proceso por interrupción de la continuidad dentro del *continuum;* pudiendo producirse esta interrupción en cualquier instante presente. Decimos, en consecuencia, que los órdenes de conciencia arrancan desde un cero límite inferior y crecen hasta llegar al «finito consciente humano», que es el máximo aparente, pero no real.

Así se explica que el cerebro concibe un orden inmediato superior de conciencia y nace la idea religiosa, como es natural.

Reflexionando sobre esto y comprendiendo a fondo el principio de la relación entre dos órdenes consecutivos de magnitudes, se vive en un estado de continuo asombro.

Un punto tiene, pues, como un *quantum,* una característica de orden de magnitud, para nuestro cerebro. Consiguientemente, un punto se comporta, relativamente a puntos de órdenes inferiores de magnitudes, exactamente como un cuerpo material visible se comporta relativamente al medio atmosférico ambiente, o sea, «los puntos de aire».

Diremos, finalmente, que si un punto posee movimiento de rotación axial *se densificará infinitesimalmente en forma de doublet simétrico por inversión.* Si no posee rotación axial tampoco habrá división, y podríamos simbolizar el punto por un número primo. Si a la rotación axial añadimos harmonización orbital, se producirán nuevos *doublets* simétricos de orden mayor de magnitudes, y así sucesivamente.

Diremos, también, que los fenómenos originan en una focalización por aferencias convergentes, del cual emana «el punto coordenado» $P = (x_1, x_2, ..., x_h, ..., x_n)$ siendo $(x_1, x_2, ..., x_n)$ los símbolos de densidades, o propagaciones focalizadas. Es así que una transformación

$$P = (x_i); \qquad i = 1, 2, ..., n; \qquad \bar{x}_i = f_i(x_k);$$

$$k = 1, 2, ..., n; \qquad d\bar{x}_i = \sum_k^n \frac{df_i}{dx_k} dx_k, \text{ etc.};$$

$$\left|\frac{df_i}{dx_k}\right| \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \alpha_k{}^i = \frac{df_i}{dx_k}$$

con la condición rotativa

$$d\bar{x}_i = \sum_k^n \alpha_k{}^i dx_k; \qquad dx_i = \sum_k^n \alpha_i{}^k d\bar{x}_k;$$

en que $\alpha_k{}^i$ es la recíproca de $\alpha_i{}^k$, etc., nos dice simplemente *que la focalización* $P = (x_i)$ *cambia, por rotaciones,* bajo el efecto de deformaciones del *continuum* mayor *que no alteran la curvatura espacial.*

Es ahora que aparece claramente el concepto de W. K. Clifford, acerca del fenómeno cerebral que llamamos movimiento. Fácil será comprender que se trata de una propagación de curvatura espacial. Este fenómeno podría resumirse analíticamente en una variación continua de curvatura esférica con rotación, o movimiento angular, *notándose que el movimiento angular es independiente de la deformación esférica espacial.*

CAPÍTULO XIII

Filosofía pura liviana

Nos hemos permitido tocar algunos puntos interesantes en digresión 0. Volvamos ahora sobre los mismos con insistencia.

¡El *continuum* mayor a *n* dimensiones se asemeja a la clásica *tabula rasa* de Locke! Lo hemos observado ya. Contiene todas las dimensiones en una forma puramente puntual tal, que excluye toda posibilidad de percepción consciente para nosotros. Este *continuum* es «una traza densificada infinitesimalmente» de una acción única repetida que se llama «gravitación». La repetición se apiló y se densificó en forma de un espacio puntual. Este procedimiento de «densificación repetida» es el más universal posible; es el único procedimiento en evolución, y lo vemos en el firmamento, lo vemos en cualquier materia, sólida, líquida, etc.; lo vemos en las células, en los insectos, en los animales y en los hombres. Todo, absolutamente todo, es un proceso de repetición regido por una ecuación de sencillez elemental que expresa el fenómeno de propagación: esa colosal consecuencia de la repetición.

La repetición excluye la posibilidad de coincidencia. El dos desaloja al uno, en espacio y en tiempo, cuando es una realidad absoluta.

Nosotros no podemos *ver* los puntos del *continuum* mayor porque pertenecen a un orden de magnitud que no es el nuestro; y es por esto que no podemos percibirlos conscientemente ni comprenderlos. Sólo los concebimos como existentes, por percepción inconsciente, y es por esto, precisamente, que podemos «concebirlos mentalmente».

Nuestro *continuum* puntual es, pues, absolutamente homogéneo; todos sus puntos son idénticos e imposibles de ser diferenciados uno de otro, por concepto determinado alguno, y así también están comprendidas todas las dimensiones en forma «indistinguible». Podríamos definir este estado de cosas como una «homogeneidad estática», caracterizándola de equilibrio y susceptible de deformación homogénea continua, *ad infinitum*.

La dimensionalización en el *continuum* se debe a un agente extraño. Este agente, según Einstein, es la gravitación, y su acción ha sido definida por nosotros como una densificación infinitesimal. Esta densificación integrada es, para nosotros mortales, «la historia perceptible consciente de la acción». Constituye una realidad absoluta desde el momento que todos tenemos conciencia de ella de la misma manera.

Nosotros no podemos percibir el futuro. Tampoco podemos percibir el «exacto presente». Percibimos el *inmediato pasado*. Esto es evidente y se debe a que carecemos de la virtud del «ajuste simultáneo» o «ajuste instantáneo» de parte de nuestros órganos de percepción. En realidad, estas formas límites de ajuste entrañan un concepto de velocidad infinita, ya derribado por Einstein. No podemos admitir en el finito esta velocidad infinita, lo cual excluye la «simultaneidad», ni podemos admitir la acción a distancia y esto excluye la «espontaneidad».

¿Cuál es el efecto inmediato de esta falta de simultaneidad en el ajuste de nuestras percepciones? Simplemente, un retraso entre la percepción consciente y la acción. Prácticamente, podemos aproximar nuestra percepción al presente, sin poder alcanzarlo. La importancia de este fenómeno es trascendental.

Ya hemos visto cómo una acción extraña penetra al *continuum*, guiada por un parámetro. Ahora no tenemos duda acerca de la naturaleza de este parámetro: *es temporal*. Dirige una densificación, y la esencia invariante de una densificación es un movimiento infinitesimal puntual; esto es, la variación de posición de puntos en el *continuum* entre sí. Esta acción, en virtud de la exclusión del concepto de simultaneidad, o del infinito, en una palabra, introduce «el tiempo» al *continuum*, naciendo en consecuencia la historia.

Excluída la acción a distancia y con ésta la espontaneidad, tenemos, *a fortiori,* que sentar que: la acción de gravitación penetra al *continuum* desde el exterior, progresiva y continuamente. La acción inicia la densificación y así, *ipso facto,* introduce la llamada dimensión temporal. Nace la historia como una estela de la acción, guiada por ese misterioso parámetro.

Que un parámetro guiará una densificación unidimensional, dos parámetros una superficie, tres un volumen, etc., no requiere comentario. Una salvedad es necesaria y es, que no todas las acciones gravitantes densifican su historia en forma conscientemente *perceptible para nosotros.* Por ejemplo, el movimiento de un cuerpo en el espacio continuo. Aquí tenemos que recurrir al relativismo en la forma que nos ha enseñado Einstein.

Ahora bien; observamos claramente, sin ambigüedades, ni confusiones, que las infinitas acciones posibles, por todo concepto, que se manifiestan para nosotros en el *continuum* como « realidades absolutas », pueden sólo ser fases distintas de una acción única: « la gravitación einsteiniana ». La prueba de ello está en el simple hecho de que todas estas acciones perceptibles determinan en el *continuum* un solo y único fenómeno, a saber: *la densificación.*

Las diferencias fásicas de densificación son infinitas, correspondiendo a cada una una fase de acción.

Repetimos que: la densificación en el *continuum* se hace perceptible para nosotros en virtud de la *dimensionalización,* y así es que llegamos al grandioso concepto de ser *el continuum espacial perceptible para nosotros: ¡ La historia de la gravitación !*

Esta historia se desarrolla guiada por un parámetro complejo temporal, que corresponde a una resultante de acciones en evolución, las cuales densifican sus estelas (o trazas) con la independencia que Newton define en *Lex II, Principia.*

En consecuencia, vemos que nuestra existencia obedece a una acción única en su origen, *diversificada por fases, ad infinitum.* La resultante de todas estas fases es la que ha escrito en forma, *sui generis,* su historia y esa historia *somos,* a todo instante y en la forma magistral que formuló Hamilton, o sea, *¡ estacionaria !*

¿ Será posible que se deje de ver que: *una densificación periódica es una reproducción de especie?* Seguramente que no. La fase, la amplitud o intensidad, la frecuencia y la época, son los cuatro parámetros dimensionales.

¿ Cómo puede escapar la observación de que « la fase » es la caracte-

rística fundamental, invariante, de una función harmónica? Sólo falta, pues, combinar lo dicho para formular que: el parámetro complexo que guía la historia de la gravitación einsteiniana tiene el aspecto de una serie harmónica (1).

Recuérdese a Laplace y Fourier.

En otras palabras, podemos formular todo esto como sigue: *la reproducción es la característica fundamental, invariante, de la acción de densificación de la gravitación einsteiniana.*

Es preciso pensar en la inmensidad de esta verdad, pura y exclusivamente matemática.

Pero aún nos falta completar esta digresión, tocando el punto de máximo interés, el que se relaciona con nuestro propio sér. El sér humano. Algo hemos dicho ya en digresión 0, suficiente quizá para permitir a un lector la inducción de lo demás. Veamos esto.

El astrónomo inglés, A. S. Eddington, hace muy pocos meses, comentando sobre el « contenido desconocido » del *continuum,* dijo que « parecería ser compuesto de la misma « cosa » que nuestra conciencia ». ¡Qué admirable observación!

Analizando nuestras percepciones descubrimos que, efectivamente, nuestro cerebro manifiesta tener todas las propiedades de un *con-*

(1) Trataremos aquí de explicar muy ligeramente lo aseverado acerca del carácter « periódico » de la acción de gravitación. Primeramente el *continuum* mayor se compone de puntos *repetidos* y es supuesto homogéneo desde que no contiene « dimensiones perceptibles » conscientemente.

El parámetro que dirige la acción es temporal, siendo el tiempo una repetición de instantes. *A fortiori,* pues, la densificación, obra de la acción, tiene que ser un proceso infinitesimal y en el límite es una repetición de densidades unitarias especiales elementales.

Este método de obtener « conocimiento » por lo infinitesimal es obra de Riemann, ese coloso de la ciencia. Pero debemos recordar que no es más que una generalización del método discreto, inaugurado por Leibnitz, de conceptuar a toda curva como compuesta de elementos infinitesimales rectos y así « una repetición infinitesimal rectilínea », o de elementos rectos. Aparece, pues, claramente el sistema de razonamiento empleado acá, mediante el cual se llega a establecer la « periodicidad infinitesimal de acción densificante de cualquier gravitación (fase) ». Esto concuerda exactamente con la realidad absoluta que percibimos, *ad infinitum,* en la naturaleza. Hemos tocado la base de este estudio, pero después profundizaremos más aún, hasta eliminar toda posibilidad de duda.

Todo nuestro mundo de percepciones descansa sobre el principio del doctor D. Hartley (filósofo inglés del año 1740-50). Esto es: la repetición, o propagación. Todo es propagación, o repetición, variado, por la reciprocidad o concomitancia, en una multiplicidad de infinitos fásicos, entre un límite superior kinético, luz y visión, y otro límite inferior dinámico, materia y tacto.

tinuum. La impresión de un objeto produce una imagen, o réplica, densificada en una forma especial en nuestro cerebro. Esta densificación tiene una existencia efímera, en el sentido de que, desaparecido el objeto, desaparece la impresión o acción, algo como el magnestimo en un hierro dulce (inducción). Pero la existencia efímera de la densificación corresponde exactamente al carácter de la acción. En cambio «la memoria» es prueba de la persistencia de la densificación, o «historia».

El hecho básico, irrefutable, es que nuestra conciencia es un *continuum menor,* dentro del cual penetran las acciones por conductos especiales históricos. Cada uno de estos conductos admite un grupo de fases determinadas, caracterizadas matemáticamente por parámetros temporales.

Es absolutamente imposible dejar de ver que si una acción densifica su historia dentro de un *continuum,* guiada por un parámetro temporal, entonces nuestro *cuerpo responde exacta y matemáticamente a la historia de las acciones que penetran al continuum de nuestro cerebro.*

Brevemente : nuestro cerebro contiene el valioso material puntual ; y nuestro cuerpo registra una historia de acciones que tienen acceso al *continuum* de nuestro cerebro, *por densificación del material.*

Es ahora que nos damos cuenta de cómo nuestra evolución conserva el compás del mundo exterior, o *continuum* mayor.

Comprendemos exactamente la razón de nuestra simetría lateral, debida a acciones exteriores a nuestro planeta, y nuestra simetría radial por efecto de acciones de ambiente local (temperatura).

Comprendemos por qué los conductos históricos por los cuales penetran las acciones exteriores a nuestro planeta, harmonizadas por nuestra *rotación periódica axial,* son dobles, y simétricos *por inversión* respecto a un plano meridiano que corresponde al medio día de la acción. Mientras que los conductos históricos que dan acceso a las acciones de nuestro planeta son asimétricos, o de simetría dudosa, desconocida.

En una palabra, comprendemos que la dirección de la densificación reside en el cerebro y que es allí donde habría que dirigirse para estudiar los fenómenos de nuestro desarrollo, y corregirlos mediante una intensificación de las acciones determinantes correspondientes, o una supresión de éstas, etc.

Se palpa la imposibilidad de una simetría de Zenit-Nadir en la densificación de nuestra existencia.

Por último, y esta es la culminación : es debido al carácter perió-

dico, harmónico, de los términos que contiene la serie paramétrica que guía la evolución de nuestra historia densificada que se producen las múltiples reproducciones de especie, *empezando con la célula y terminando con el sér humano.*

No hay para qué seguir, pues el camino está trazado; resta solamente, aplicar la observación, sagacidad, etc., y los conocimientos adquiridos, interpretando adecuadamente la parte geométrica.

Y es así, cómo *las matemáticas han triunfado.*

¡Tiene visos de milagroso este triunfo! Triunfo de la « percepción continua ».

Descubrimos que las matemáticas en sí, como los puntos del *continuum,* poseen esa misma cualidad de « requerir una acción extraña para *producir una interpretación* ». Nosotros en lo anterior sólo hemos hecho uso de una fase de interpretación; faltan las fases kinemáticas, dinámicas, biológicas. químicas, etc.

RESUMEN

Vamos a resumir lo dicho en este capítulo. « La dimensionalización » en el *continuum* es obra de una acción sola: la gravitación einsteiniana. Esta acción es *infinitesimal.*

Percibimos conscientemente esta acción por su historia, o sea, la acción realizada, de dos maneras:

1ª Como movimiento integral en el espacio continuo, o integración kinética;

2ª Como *densificación,* esto es: *una integración dinámica.*

La densificación de una historia es una realidad absoluta para nosotros, pues todos la percibimos de la misma manera.

Cada acción posee un parámetro temporal (periódico).

Una densificación periódica es una reproducción de especie en el *continuum,* y responde a una acción harmónica. La historia de una tal acción, *a fortiori,* sólo puede consistir en una integración por *repetición de densificaciones infinitesimales.*

La acción de gravitación einsteiniana es una *acción periódica, o harmónica.*

Decimos, en consecuencia, que la característica fundamental de la gravitación einsteiniana es una reproducción infinitesimal de densificaciones. Una historia integral, compuesta de *repeticiones perceptibles puntuales.*

Nuestro cerebro constituye un *continuum* menor dentro del *continuum* universal, o mayor.

Las acciones del *continuum* mayor penetran a nuestra conciencia y *densifican su historia,* infinitesimalmente, en *el cuerpo humano.*

Correspondiendo las acciones a las historias «densificadas», es evidente que si aquéllas son «periódicas», estas historias revelarán el hecho en forma *real absoluta. Nuestro cuerpo lo revela hasta en sus más mínimos detalles.*

Es menester tener presente todo lo dicho para seguir ahora avanzando a fondo.

El hecho básico fundamental de ser un *continuum* una multiplicidad de puntos, iguales unos a otros, revela la historia de *una acción esencialmente periódica extraña.* Esto es, *una densificación puntual.*

Pero la acción de gravitación de Einstein *es periódica. A fortiori,* pues, la única diferencia que puede haber entre la acción generatriz del *continuum* puntual y la acción Einstein consiste en «las posibles diferencias entre dos funciones harmónicas».

Recordemos que la característica «invariante» de una función harmónica es *la fase.*

La característica fundamental e invariante de toda función periódica es *la repetición de la fase.* Digamos, *in abstractum, la repetición.*

La geometría encuentra su base fundamental, única y exclusiva, en la noción de *número.*

Nuestros *continuums* sólo se hacen comprensibles cuando los *numeramos puntualmente.* Coordenadas numéricas sin significado especial físico alguno, según dice Einstein. Pero aquí, humildemente, presentamos nuestras excusas al sabio por divergir. Decimos: *¡ el número es símbolo de repetición !*

Comprendemos de golpe la razón de la correspondencia entre geometría *abstracta y la realidad absoluta. ¡ No hay geometría abstracta !* El cerebro es infinitamente perceptible.

Weyl busca de destruir el carácter *postulante* que tiene la forma cuadrática que caracteriza un campo métrico pitagórico. Y es admirable cómo explora al *continuum* espacial con el auxilio de la teoría de los grupos continuos y las rotaciones infinitesimales. El resultado no es absolutamente concluyente, deja una duda que el mismo Weyl señala. Trataremos este punto, *in extenso,* a continuación. Por otra parte, esta duda la hemos disipado *por la teoría de la invariación de densidad a la par de invariación de curvatura,* que ya desarrollamos analíticamente en otro lugar.

CAPÍTULO XIV

Simetría cerebral. Forma cuadrática pitagórica y dos lóbulos Forma bicuadrática y cuatro lóbulos

Terminamos el capítulo XIII llamando la atención a la forma magistral en que Weyl explora el espacio continuo con el auxilio de la teoría de Lie Engel, de grupos continuos, a fin de demostrar que la forma métrica debe tener la característica pitagórea cuadrática. Nosotros pensamos atacar este problema basándonos en el terreno de «la densificación», y así *resolver la duda* que queda como resíduo del estudio de Weyl. ¡Pura lógica!

Desde ya advertimos, que sólo hemos de tocar, filosóficamente, la cuestión, evitando «las fases». Nos fundamos sobre la «densificación» como «historia de una acción», y en especial de la acción de gravitación de Einstein. Añadiremos, *a fortiori,* que esta acción infinitesimal posee como característica fundamental, invariante y única, *la repetición,* la cual se hace perceptible como una realidad absoluta para nosotros en la *reproducción por densificación.* Esto ya lo probamos.

Hagamos ahora una hipótesis. Supongamos que nuestro sol es una acción en evolución, en el *continuum* mayor, dirigida por un parámetro temporal de magnitud tal que, para nosotros, tiene el carácter de *acción estática.* Así pues, con Einstein, la acción solar densifica un campo en su vecindad espacial continua (puntual), en una forma «radial esférica, o a simetría radial esférica» y, relativamente a nosotros, *estáticamente,* o independiente del tiempo. Claro está que esto es completamente «ideal» y no corresponde sino «aproximadamente» a la verdad. Pero basta para fijar ideas, pues contiene «la parte invariante» de verdad. Esto es lo que Einstein describe como «el campo estático a simetría radial esférica».

Ahora, elijamos un punto de este campo estático y situemos en el mismo a «la historia ya densificada» que representa nuestro planeta. Un *continuum* menor, ni más ni menos. No nos preocuparemos de su origen, etc., sólo le atribuiremos una forma esférica, un eje fijo y una rotación uniforme, como la que posee actualmente. No hay para qué suponer que describe una órbita al rededor del sol. Supondremos que existe fijo en un punto del campo. Rehuímos investigar las dife-

rentes categorías de *continuums,* sólo sabemos que responden a acciones mayores y son sus historias.

Tenemos, pues, condiciones ideales uniformes, constantes, o si se quiere « estacionarias ». Nuestro planeta, en virtud de « una rotación axial », diurna, uniforme, guiada por un parámetro temporal, *ad hoc,* harmoniza la acción estática del sol sobre su superficie continua densificada.

Es preciso ahora introducir una salvedad notable: que los puntos que componen el *continuum* planetario « no pueden *volar* en sentido opuesto a la rotación axial » (sin excluir de notar que llegará el día en que *descubrirán* la manera de hacerlo. Ya tenemos aeroplanos).

Huyendo siempre de las fases, diremos lo que ya hemos explicado, que si el sol densifica su acción en nuestro *continuum* planetario, este *processus* tiene, *a fortiori,* que revelarse infinitesimalmente en una invariante, a saber : la simetría lateral por inversión meridiana, y que éste procede guiado por un parámetro temporal que varía constantemente *en un solo sentido,* gracias a la rotación axial. Resultará, pues, que la « *densificación solar* » *es guiada por un parámetro temporal que sólo tiene un sentido.* Decimos, en consecuencia, *que el tiempo varía en un solo sentido.* (Después aparecerá sin sentido ni dirección).

Vamos, ahora, a suponer que por alguna causa misteriosa, nuestro planeta *invierte su rotación* y gira en sentido opuesto con la misma velocidad angular de antes. ¿ Qué sucede ? ¡ Absolutamente nada ! El *processus* marcha exactamente como antes, *para nosotros,* en virtud de ser *la simetría : una simetría por inversión meridiana.* Esto quiere decir simplemente que el parámetro temporal que dirige la densificación de *nuestro continuum* menor es independiente de *sentido positivo, o negativo,* si es que así caracterizamos dos *direcciones opuestas.*

Téngase esto en cuenta, o presente. Ahora bien : fijémosnos en nuestro *continuum* cerebral, *que es obra de una acción exterior sobre nuestro planeta.* Nuestro planeta es el que provee los puntos a nuestro *cerebro* (y no pensamos investigar cómo lo hace, hasta más adelante) ; la acción solar los « densifica ». La prueba más irrefutable de esto la tenemos en nuestro cuerpo humano. Pero ahora tenemos que añadir *nuestra misma conciencia al processus,* o sea, *nuestro mismo cerebro,* lo cual quiere decir que nuestra propia « conciencia » *no escapa a la acción harmonizante de nuestra rotación axial.* Esto se verá inmediatamente notando que la densificación solar determina una simetría por inversión meridiana, a saber : *de oriente a medio día* y de

medio día a poniente, correspondiendo una absoluta anulación del procedimiento a *media noche.*

Decimos ahora: nuestro cerebro densifica según esta fórmula y nuestra conciencia está *regulada por la misma.* Esto último es evidente como los conductos históricos revelan.

Resulta pues, en este caso ideal que estamos tratando, que podemos elegir un punto, *centrum centrorum,* en la acción de *medio día,* en el plano meridiano que nos corresponde, como un origen, o un cero, de manera que *las direcciones que irradian del mismo, son caracterizadas por « simetría de inversión » en la densificación,* y decimos ahora *que las dos direcciones de densificación se pierden a uno y otro lado en el infinito.* Siendo la realidad absoluta, que *se pierden* en el *centrum centrorum* de *media noche.* (Klein, Lobatchefsky, Cayley, Taurinus, etc.). El infinito de media noche.

Pero hemos dicho que « la densificación » es para nosotros la « dimensionalización » en el *continuum* amorfo, y es la que nos permite distinguir o percibir las dimensiones. Aquí, pues, tenemos en juego *una acción guiada por un parámetro, que es independiente de sentido* ($\pm$), *a fortiori, pues « la densificación » tiene que ser independiente de sentido.* Pero Einstein nos ha mostrado que los fenómenos perceptibles son del dominio exclusivo del campo métrico, simples variaciones de una cosa llamada: *distancia entre dos puntos.* No hay más, pues. Como esta distancia es el *fons et origo* de todo, ésta tiene necesariamente que hallar su expresión geométrica general e invariante en una forma *cuadrática pitagórica.* Lo mismo que si dijéramos: nuestra conciencia distingue dos sentidos en virtud de su propia formación, pero la acción determinante no los posee; para inmunizar, pues, el concepto « distancia entre dos puntos », contra semejante vicio *doble* de la conciencia, debemos adoptar una forma *simétrica doble,* o sea la que emana de *una proyección escalar paralela,* que es una *pitagórea cuadrática.* Así habremos conformado las matemáticas exactamente *con la realidad absoluta que existe densificada en nuestro continuum cerebral,* que es como una proyección escalar paralela.

Si las constantes planetarias fueran tales que nuestra densificación cerebral se manifestase dividida en *cuatro lóbulos a simetría invertida* (doblemente simétrica), la forma que correspondería sería la llamada bicuadrática.

¿ Será posible que haya quien no se aperciba del « inmenso significado » que contiene todo esto ?

Hemos supuesto una tierra fija en un punto del campo solar. Esto

es lo mismo que suponer que describe una órbita geodésica circular, y que el sol es perfectamente homogéneo, o sin manchas, etc.

Decimos, por lo tanto, que nuestra existencia, tal como la percibimos, no es otra cosa que la historia densificada de una única acción, para nosotros estática, *modificada por nuestras constantes planetarias,* y el autor tiene la convicción profunda, intuitiva, sin poderla formular (!), de que debemos a la luna la diferenciación en *sexos* del género humano y reino animal, viendo la manera de comprobar esto en el estudio detenido de la mineralogía, o geología, y la botánica. Quiere decirse con esto, que es en los bordes, por donde se pasa de una de estas *ciencias a la otra,* donde se descubrirá la « transición » que obedece al « nacimiento de la luna », nuestro satélite. Alguien preguntará seguramente, ¿ en qué puede uno fundarse para esta « intuición » ? En efecto, y respondemos como sigue : nosotros iniciamos *nuestra existencia en otra anterior* y nuestro parámetro temporal contiene un término a largo período de repetición. En consecuencia, aparecería que este último término aludido intervino en la serie harmónica de nuestro « parámetro director », como resultado de esa acción perturbadora de disociación. Ahora bien : el *continuum* lunar marca una época de densificación puntual planetaria crítica, y su acción de *densificación cerebral* se ejerce desde un plano *casi coincidente con el de la eclíptica,* siendo *el período harmonizante de esta acción el más largo de los que* pertenecen al sistema tierra-luna, conceptuados como *uno.* Nada extraño, pues, que *esta densificación* se reproduzca con el *período mayor,* y que, por lo tanto, corresponde a nuestro satélite, la reproducción de nuestra especie en la forma que se verifica.

En otras palabras, como una propagación sólo puede descomponerse en componentes recíprocas : la luna es una forma recíproca de la tierra, y la masculinidad guarda la misma relación con la feminidad. sin perder de vista que el cero de una reciprocidad es la igualdad absoluta. De aquí resulta que debemos atribuir a la uniformidad de la *rotación* del movimiento axial diurno de nuestro planeta *la razón de ser de la igualdad de las dos mitades simétricas de nuestro cuerpo* y debemos atribuir a la elipticidad de la órbita lunar la razón de ser de la *desigualdad* perceptible, o reciprocidad, entre hombre y mujer, o sea, masculinidad y feminidad. Por esto interesa estudiar las constantes planetarias, para poder relacionar todos los fenómenos conscientemente perceptibles en la naturaleza, etc., etc. Cualquiera comprende ahora que la tierra y la luna, siendo formas recíprocas y *atrayéndose,* deben ser *desiguales.*

Aquel que conoce la teoría de Darwin, de las mareas, podrá deducir una serie de consecuencias «iluminantes», aplicando la interpretación que corresponde a la misma, como dejamos señalado. Daremos un simple ejemplo: la acción solar densifica infinitesimalmente a nuestro *continuum* cerebral, y por su intermedio forma el cuerpo humàno, procediendo la materia prima del planeta terrestre. Ahora bien: la tierra por su rotación axial determina la simetría invertida lateral que observamos como realidad absoluta. Nótese además que la tierra gira gobernada por un tensor lineal que es «la velocidad angular». Decimos, en consecuencia: la distancia de los conductos históricos del plano de simetría «medio día a media noche» *está gobernada por este tensor.*

Tenemos en esto un medio de leer la historia de la evolución y de interpretar el significado de la misma. Ejemplo: un insecto cuyos ojos están en las extremidades de dos antenas, parece revelar una consonancia especial entre períodos de densificación y de acción solar, variada por otras causas perturbadoras existentes, y que nos incumbe averiguar. Las aplicaciones de este criterio son infinitas, y las consecuencias son de la más alta importancia para el bienestar futuro humano.

Las fases, pues, están escritas en forma indeleble, por donde quiera que miremos. No hay más que leer e interpretar.

Los ojos oblícuos de altas latitudes y la diversidad de razas entre trópicos, etc.

En conclusión, decimos: si la tierra cambia de período de rotación, y la luna se aleja, alargándose su mes hasta los 55 días de los actuales, que dice Darwin en su hipótesis lunar ser el límite, la humanidad tenderá en alguna época, a harmonizar su gran período «densificante» (inercia de densificación por falta de ajuste simultáneo) con el período de rotación, y tendremos un *maximum de capacidad intelectual humana;* la culminación del hombre. Después, si sigue el *processus,* el cerebro terminará por tender a dividirse en dos partes, separados desde la boca, que descenderá al cuerpo. Nada raro sería que terminase la humanidad siendo «insectos a dos cabezas ciclópeas» y completamente embrutecida, como el insecto, etc., o divididos en dos mitades, separadas completamente, e iguales, y reproduciéndose vegetativamente como planta, etc., etc. Pero aquí hemos soltado la rienda a la imaginación, y esto se traduce en nuestro cerebro por un efecto correspondiente a otro sobre nuestro planeta, a saber: un viento.

DIGRESIÓN δ

Cuerpo humano

Se ha visto cómo en un *contiuuum* puntual homogéneo, o sea, de densidad uniforme constante, es imposible diferenciar conscientemente una dimensión por razón de la « igualdad » que lo caracteriza.

La dimensión nace, como fenómeno perceptible, diferenciable de una densificación puntual infinitesimal. Sabemos que una densificación está caracterizada por una curvatura esférica especial, que puede ser uniforme en el orden finito consciente de magnitudes perceptibles, o uniforme en el orden infinitamente pequeño de elemento espacial. Esto es, si:

$$\frac{ds^2}{ds_0{}^2} = 1 - \mathbf{R}_1 da \qquad \text{y} \qquad \mathbf{R}_1 \neq 0.$$

Entonces cualquier variación de da hará variar la densificación del *quantum,* o alterará su estructura, haciéndolo divergir del estado incoherente euclideano de

$$da = 0, \qquad \frac{ds^2}{ds_0{}^2} = 1, \qquad \mathbf{R}_1 \,.\, da = 0.$$

Nos damos cuenta, por lo tanto, que un *continuum* puntual libre, sin cohesión, euclideano, es « infinitamente sensible » y responde por alteración de curvatura esférica a cualquier acción, por infinitesimal que sea. De esta manera podríamos decir que $\mathbf{R}_1 \neq 0$ caracteriza el *peso de un quantum unitario,* o sea, un punto denso.

Una manera de fijar ideas acerca de la naturaleza de un *continuum* euclideano es figurarse una materia que, por resonancia térmica, ha pasado al estado líquido incoherente y, en seguida, hacer el esfuerzo mental de suponer suprimida la gravitación terrestre. Tendremos así el estado

$$\frac{ds^2}{ds_0{}^2} = 1; \qquad \mathbf{R}_1 da = 0;$$

$$da = \text{curvatura esférica} = 0$$

$$\mathbf{R}_1 = \text{peso quántico} \neq 0,$$

sabemos bien que $\mathbf{R}_1$ encierra un sistema planetario infinitesimal y es una focalización a la vez. En

$$P(x_i) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

se tiene :

$$\mathbf{R}_1 = \sum_{ik}^{n} x_i x_k \frac{dx_i}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds} - \sum_{ik}^{n} x\, x_i \frac{dx_k}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds}$$

$$i, k = 1, 2, ..., n.$$

Si quisiéramos simbolizar matemáticamente nuestro cerebro como un *continuum* puntual denso, infinitamente sensible a acciones exteriores, escribiríamos simplemente la ecuación

$$\frac{ds^2}{ds_0{}^2} = 1 - \mathbf{R}_1 da$$

para

$$da = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{R}_1 \neq 0,$$

en la hipótesis de ser $\mathbf{R}_1$ variable de determinada manera (escalarmente), explicaría el escalonamiento fásico de nuestros órganos de percepción.

Percibimos, pues, al cuerpo humano en el *continuum* mayor ambiente como orden finito consciente de magnitud, simplemente porque posee una densidad diferente del espacio puntual que lo rodea. Por diferencia de estructura puntual, o, si se quiere, por diferencia de curvatura espacial. La obra de densificación está en plena actividad. Todas las acciones fásicas exteriores son conducidas por aferencia al cerebro, esto es, focalizadas en el cerebro, donde se produce la combinación en cada foco y la descomposición en dos componentes, una de carácter kinético y otra de carácter dinámico, siendo esta última la que densifica por eferencia. Quiere decir que nuestro cerebro está en constante y continua actividad por efecto de la percepción continua aferente. Vivimos en el más absoluto e íntimo contacto con el *continuum* espacial ambiente, focalizando todas las acciones, absolutamente todas.

Fácil será para el lector explicarse en una forma elemental cómo los hombres que hablan un mismo idioma viven en un mismo paraje, o perciben una misma topografía. Cómo, las personas de una misma familia, densificándose igualmente, producen ese fenómeno llamado característica de familia, etc. Cómo influye el orden en la persona, esto es, un sér que se densifica en un medio ordenado será muy dife-

rente de otro que se integra en un medio desordenado. La densificación fonética también ofrece estas fases : un hombre desarrollado en medio del « ruído y sonidos discordantes » será diferente de otro densificado en un medio silencioso, o armonioso, etc.

¿ Acaso es motivo de sorpresa que la difracción luminosa en un monte de árboles densifique por percepción cerebral en el pájaro las *cónicas luminosas* sobre la cáscara del huevo que pone ? Y qué estas manchas circulares sobre el huevo se traduzcan en « sombras aferentes » dentro del mismo, cuando la gallina (pájaro) empolla ? Digamos « sombras térmicas », pues se trata de gravitación térmica. Debiendo notarse que la acción de difracción es mas intensa y continuada en el preciso intervalo en que la gallina (pájaro) emplea en poner el huevo, etc. Todos los fenómenos miméticos tienen así su explicación, pues *el color* no es más que una fase de percepción kinética y, por lo tanto, obedece a una característica de curvatura esférica, o densidad. Pero cualquiera, sin mucho esfuerzo, puede por sí elaborar este punto, *ad libitum,* y deducir muchísimas consecuencias prácticas y de gran utilidad.

Relativamente a la densificación fonética que observamos en los animales, pájaros y en el hombre, podemos llegar a sentar que se trata de un fenómeno de correspondencia entre dos órdenes de magnitudes diferentes. Quiere decir que si *a una deformación infinitesimal determinada podemos hacer corresponder un infinito de deformaciones en el orden inmediato superior de magnitudes, entonces, la densificación de traza de una correspondencia arbitraria admitirá su repetición, y así la reproducción de densificación sucesiva y su perpetuación como realidad absoluta en nuestro cuerpo.* Esto explica *la arbitrariedad básica* de un idioma que es en todo análoga a la arbitrariedad básica de la numeración coordenada de los puntos de un *continuum ;* exactamente análoga y por la misma razón matemática explicada. Vemos, pues, que *una vez* que se ha producido una correspondencia entre una aferencia, o deformación focalizada, infinitesimal, y la deformación eferente, dilatada por propagación hasta el orden finito consciente inmediato de magnitud, queda establecida la reciprocidad por la densificación de traza, o sea : queda establecida *la posibilidad de inversión del fenómeno.* Es así, que la geometría nos permite resolver este problema interesante. Repetimos, que *la indeterminación* entre la densificación infinitesimal, o deformación focalizada, y la deformación finita por eferencia, es destruída por acciones o percepciones infinitesimales continuas del *continuum* ambiente. La falta de conciencia, y la con-

tinuidad del proceso se traducen en el fenómeno que llamamos, libre albedrío, o acto de voluntad, etc., como ya se ha notado en otra parte.

Resumiendo, pues, una percepción kinética o visual proyectiva, es una repetición, y es motivo de una deformación continua infinitesimal focalizada en un centro cerebral. Esta deformación continua es transformada por « eferencia de repetición » en deformación continua de otro orden de magnitudes, por ejemplo, en deformaciones pulmonares y vocales, etc., traduciéndose el fenómeno en un *sonido vocal y una aferencia auricular,* o una percepción auricular. Así queda establecida la *reversibilidad* del fenómeno mental a una repetición de la percepción visual inicial, o una repetición del sonido vocal final; indistintamente, se reproduce el proceso, siguiendo la traza ya densificada. Todo consiste, pues, *en las percepciones accidentales que predominan en el momento del fenómeno y que gobiernan la primera correspondencia entre las deformaciones.* Fácil es ver que es en virtud de la ausencia de estas primeras circunstancias de ambiente que se hace necesaria la educación, o « instrucción », *para guiar esa primera correspondencia* y así densificar la traza inicial, como si dijéramos, fijar el camino. Igualmente fácil es observar que, una vez *densificado un idioma* de correspondencias proyectivas, se pasa a otro idioma por un simple mecanismo de « transformación de coordenadas ». Matemáticamente:

$$P = (x_i) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

$$\bar{x}_i = \varphi_i(x_k) \qquad i, k = 1, 2, ..., n,$$

esto es, un diccionario. Fluye inmediatamente de lo anterior que *un lenguaje nace de la desigualdad métrica de nuestras percepciones,* y que el concepto de *número* nace de la igualdad de las mismas, como si dijéramos, de la igualdad global en todo orden de magnitud. Sabemos ya que relacionamos percepciones, que son propagaciones de carácter recíproco, valiéndonos del absoluto, o sea como cuando pasamos de relaciones proyectivas a métricas, en geometría. Podríamos fácilmente formular una hipótesis del procedimiento valiéndonos del fenómeno de difracción luminosa, ya mencionado en el caso del huevo y el pájaro, pero no hay para que profundizar el punto. Cualquiera fácilmente podrá hacerlo, valiéndose de *una doble proyección* de las cónicas similares en que se proyectan cualquier forma intersticial que da paso a una propagación, etc.

Todo esto se resume en el principio de linealizaciones por cambio

de orden de magnitudes, o por paso del orden finito consciente al infinitesimal, tan conocido. A esto hay que añadir las observaciones fundamentales siguientes:

Nuestro universo perceptible es un *continuum* de repetición: *Observación;*

Nuestras percepciones son continuas y *varían en intensidad* desde un límite inferior, tendiente a cero: *Observación y lógica;*

Percibimos por la repetición y, así, sólo tenemos *una forma básica invariante de percepción: Observación y lógica;*

No existe geometría abstracta: *Axioma;*

Número es un símbolo de repetición: *Axioma.*

Por fin, percibimos por focalización de propagaciones, o repeticiones, en nuestro cerebro, exactamente como un astro *percibe* propagaciones en el *continuum* mayor, o un átomo en un *quantum* cualquiera, o un punto en el *continuum: Observación y lógica.*

Terminamos esta digresión atendiendo a la explicación matemática de *la dimensionalización,* o densificación de una traza en un *continuum.*

Hemos visto que un *continuum* euclideano tiene como expresión analítica la fundamental cuadrática:

$$\frac{ds^2}{ds_0^2} = 1 - \mathbf{R}_1 da$$

de peso puntual:

$$\mathbf{R}_1 \neq 0,$$

curvatura:

$$da = 0,$$

por lo tanto:

$$ds^2 = ds_0^2,$$

quiere decir, que el estado espacial euclideano es un estado incoherente, o sea, *sin cohesión.* Digamos: cohesión nula. Este estado es el que llamamos vulgarmente *líquido,* y es sólo aproximado por causa de la gravitación terrestre. Un líquido es, pues, un *continuum* puntual de puntos (*quanta*) densos determinados, *sin cohesión.* La naturaleza geométrica de estos puntos, o *quantas* elementales, está encerrada en la expresión

$$\mathbf{R}_1 \neq 0.$$

Deducimos, *como consecuencia directa, que toda densificación, o dimensionalización, nace en un continuum euclideano,* o sea, en un estado euclideano incoherente. Se revela inmediatamente que todo el fenó-

meno de densificación depende del resonador esférico *da,* el cual, variando en un sentido determina *una propagación convergente* (materia) y en otro sentido *una propagación divergente* (disolución).

Esto es de mucha importancia, pues nos hace conocer una condición básica de toda densificación, *o realidad absoluta.* En esta condición básica está la explicación geométrica del proceso de *nutrición* como fenómeno inverso del de densificación. Quiere decir que es *la nutrición* que produce el estado euclideano incoherente sobre el cual obran las acciones exteriores y *densifican.*

Refiriéndonos al sér humano, podemos sentar que *la nutrición produce lo que llamamos cerebro* (no tejido como se creía). Cada órgano digestivo provee de los *quanta* elementales especiales a cierta *zona cerebral euclideana.* Cada zona constituída, como se ha dicho, por puntos de determinado peso, responde a determinadas fases de percepción, etc. Los señores médicos tendrán forzosamente que tener este principio básico muy en cuenta y dedicar sus meritorios esfuerzos en el sentido de descubrir las relaciones entre órganos digestivos y zonas euclideanas cerebrales para poder así atacar eficientemente cualquier enfermedad. Esto es : *una enfermedad es un simple desorden cerebral, producido por aferencias nocivas,* sea cualquiera que sea el carácter de éstas. Es por esto que conviene un tratamiento que tenga por objeto « parar la obra de densificación ».

Suprimir las percepciones, o acciones exteriores. La obscuridad, el silencio, la inmovilidad y la igualdad de resonancia térmica conveniente (temperatura) son armas formidables para combatir una enfermedad. Si a estos añadimos *la desintegración* por dietética conveniente, aumentamos la eficiencia de nuestros recursos. Quiere decir, que podemos :

1° Parar la obra de densificación, o reducirla apreciablemente;

2° Desintegrar tejido, suspendiendo convenientemente algunos alimentos determinados ;

3° Integrar nuevamente por alimentos determinados y acciones exteriores intensificadas y prolongadas; siendo estas últimas las que densifican, etc.

En una palabra, surje el tratamiento de la consideración simple que : *nutrir,* consiste en producir un estado euclideano incoherente reduciendo un alimento cohesivo al estado de no cohesión y elevando « los puntos » a una zona cerebral (a descubrir), ciertos y determinados puntos, o *quanta.* Las percepciones obran sobre estos « puntos » por medio de los sentidos y procede en seguida la eferencia y densifi-

cación. Nada más. El error actual está en creer en la producción directa de tejido por nutrición, etc.

Cuando nosotros nos introducimos en una cama, nos tapamos y dormimos, no hacemos otra cosa sino *reducir el paso de la obra de densificación.* El principio es el de la «invernación» observada en los batracios. Nada permite oponer la creencia de que si pudiéramos substraernos a las acciones exteriores, *podríamos prolongar indefinidamente nuestra existencia, o vida.* Al contrario, todo indica la posibilidad y la facilidad de lograrlo. Necesitamos *refugios,* guarnecidos de la *acción solar densificante,* etc. Los insectos disparan de la acción solar enterrándose bajo tierra, etc.

Matemáticamente, el cáncer resulta ser un desorden cerebral que consiste en la *superposición de eferencias.* Quiere decir que la densificación se dirige por concentración *a una sola zona del cuerpo.* Esto deberá responder a la desaparición de límites, ú horizonte, entre dos o más zonas cerebrales, lo cual debe sobrevenir por error de aferencia nutritiva. Tratamiento de obscuridad, silencio, inmovilidad, e igual temperatura, con estudio de dietas, parecería ser el más indicado.

MISCELÁNEA

Filosofía corriente

ESTÉTICA

Para los efectos de fijar ideas solamente y evitar complicaciones, vamos a admitir que existe el libre albedrío. Sabemos que este fenómeno es una simple consecuencia de perceptibilidad continua e infinita, y que el cerebro responde al ambiente.

Un hombre impulsado por acciones de ambiente que focalizan en su cerebro y densifican tejido, procede a elegir una vivienda. En seguida elige muebles, etc., y adorna a su antojo su casa. Elige una compañera, o se deja elegir por la compañera, y funda un hogar, dentro de cuyo ambiente se densifica por acciones persistentes, continuas, la familia. Todo responde a la elección o gusto de los progenitores.

En vista de esto, y de acuerdo con la tesis de densificación y de repetición, decimos, que *las formas humanas así densificadas tienden a repetir los efectos producidos por el ambiente,* y siendo este último

«agradable por elección», también lo serán los seres densificados bajo su acción. Este es el fenómeno llamado *estética.*

Fácil es percibir *la invariante de elección* en el proceso, *ad infinitum,* de densificación progresiva que caracteriza lo anterior. Se elige el sitio, se elige el ladrillo cuya forma obedece a selección, se elige un mueble cuyo constructor eligió construir a su gusto, etc. Igualmente fácil es ver que, remontando a un orden mayor de magnitudes, todas esas elecciones están supeditadas a condiciones de gobierno, esto es, de país. A un gobierno ordenado, estable, corresponderá mayor intensificación de esa libertad de elección, y así en lo demás podemos ir remontando a condiciones de suelo, de clima, etc., *ad infinitum.* Pura repetición. Resultado: la densificación tiende a ser una cristalización, tanto más regular cuanto más harmonioso el medio ambiente, tanto más irregular, conglomerado u amorfo, cuanto más discordante el medio, etc.

La riqueza aumenta la libertad de elección, y así aumenta, o intensifica, el fenómeno que llamamos *estética.*

Un gobierno debe, pues, procurar *la harmonía,* bajo todo punto de vista, en su acción. Una municipalidad sabia cuidará la estética de la ciudad y suprimirá toda discordancia, sea visual, auditiva, o de tacto dinámico. Y nótese bien que los sonidos densifican como los idiomas. Conviene suprimir la terrible y estridente discordancia sonora en nuestra gran metrópoli. El efecto se reflejará pronto en la fisonomía del pueblo. Todo esto se repite para un hogar, etc.

VIENTO

Leemos en la enciclopedia británica, undécima edición: *un movimiento natural del aire.* ¿Qué significado tendrá esto?

La repetición explica este fenómeno de la manera sencillísima siguiente: el viento es una propagación atmosférica cuya longitud de onda es de *un orden de magnitud superior al orden de su frecuencia.* Quiere decir que lo que percibimos auditivamente como *sonido musical* es un límite recíproco de *viento* que percibimos dinámicamente por *tacto.*

Cambiemos el orden de magnitudes y consideremos una estaca clavada en un fondo de mar, cerca de la costa, que supondremos playa de manera que la profundidad que cubre la estaca no exceda de seis metros, por ejemplo. Ya sabemos que con una profundidad mayor

de quince metros no se sienten las olas en la superficie (aparentemente).

Fácil es ver que cada vez que avanza una ola sobre la playa, la estaca estará en una corriente de agua, y cada vez que retrocede el agua, después de romperse la ola, volverá a estar la estaca en otra corriente opuesta de agua. Si la estaca tuviera cerebro como el nuestro y no pudiera apartarse de su vecindad inmediata, poseyendo un orden de tiempo *sui generis,* diría cuando avanza la ola, que *sopla un viento acuático* de tal dirección, sobreviniendo calma al mucho tardar en su orden especial temporal, y más adelante un *viento acuático contrario.* Hablaría de toda clase de vientos y fenómemos meteorológicos, acuáticos, etc. Creciendo la marea y cubriéndose la estaca con mayor cantidad de agua, que supondremos suficiente para que no sintiera corriente cuando pasan olas regulares, la estaca, mirando su barómetro, diría que sube y baja con períodos que hacen sospechar regularidad, etc., sin poder darse cuenta que cada vez que sube el barómetro, es porque pasa la cresta de la ola por encima y baja cuando el *hueco* de la ola, etc. Pues bien : si uno sigue este proceso podrá repetir en el orden acuático todos los fenómenos que nosotros percibimos en nuestra atmósfera ambiente.

Quiere decir que así como nosotros existimos en otro orden de magnitudes, diferente del de *la estaca, y comprendemos la naturaleza de la propagación* que ocasiona todos los fenómenos acuáticos en el cerebro de la estaca, también podría haber un sér especial que contemplando nuestro planeta desde afuera viera y comprendiera *la propagación atmosférica que ocasiona toda nuestra meteorologia.* Esto es repetición. Así vemos que *viento* es *una ola atmosférica* que pasa por encima de nosotros; sube el barómetro cuando crece la marea atmosférica o cuando hay «mar de leva», y pasa la cuesta de una ola, etc. Todo es repetición, o propagación, en diferentes órdenes de magnitudes; teniendo cada orden su dimensión temporal especial.

Ahora se comprende lo dicho : que la única diferencia entre una nota musical y un viento es de magnitud, siendo ambos fenómenos idénticos en su naturaleza : *una propagación atmosférica.* El lector podrá vislumbrar lo que se ha querido decir cuando se sentó que luz y materia son dos límites recíprocos de un mismo fenómeno : ¡propagación! Uno lo percibimos visualmente y el otro por tacto.

RELIGIÓN

Al tratar del « punto » dejamos establecida, a la par de percepción continua, la continuidad de órdenes de existencia, o de conciencia.

Un punto es un cero para un orden de conciencia y un infinito para el orden inmediato inferior. Coloquémonos en ese orden inmediato inferior, *sui generis,* y percataremos en seguida que es *en el concepto de la existencia de un orden inmediato superior consciente* que estriba la idea religiosa. Más aún, *nos damos cuenta de la indeterminación que tiene que caracterizar esa idea,* por efecto, precisamente, de su ilimitación. Comprendemos ahora el por qué de la indeterminación religiosa.

Lo importante de notar es que la idea religiosa no obedece a una abstracción en el sentido que explicaba Cayley para las matemáticas, sino que obedece a *una existencia real, perceptible inconscientemente por nuestro cerebro.*

ATRACCIÓN

Este fenómeno cerebral se define matemáticamente diciendo que responde a la composición de dos propagaciones recíprocas. Supongamos dos propagaciones focalizadas en $P = (x_i)$ del *continuum* mayor; si

$$c_x = \xi \, . \, a$$

$$c_y = \eta \, . \, b,$$

la composición dará el tensor de segundo orden

$$(c_x \, . \, c_y) = \xi\eta \, . \, (a \, . \, b),$$

en que será evidentemente $\xi\eta =$ constante y supondremos que es un valor finito consciente para nuestro cerebro. Pongamos:

$$(c_x \, . \, c_y) = \nu \, . \, \lambda; \qquad \nu = \xi\eta; \qquad \lambda = (a \, . \, b);$$

estudiemos ahora el significado de

$$(ab) = \lambda \gtreqless 0$$

que implica

$$(c_x \, . \, c_y) \gtreqless 0,$$

comprendemos inmediatamente, sin necesidad de comentarios mayores, que

$$(c_x c_y) \rightarrow 0$$

es una composición normal y es *una incoherencia, o un líquido sin cohesión,* o con una cohesión muy pequeña que llamamos *viscosidad* y que mide el grado de aproximación al límite cero, o a la *normalidad absoluta.*

Si tenemos el medio de hacer *girar* las propagaciones C_x y C_y desde la normalidad, en uno y otro sentido, comprenderemos que

$$(c_x c_y) > 0 = \textit{materialización}$$

por aumento positivo de cohesión y

$$(c_x \,.\, c_y) < 0 = \textit{vaporización}$$

por aumento negativo de cohesión.

Percatamos que *la gravitación cohesiva es indeterminada entre dos límites de magnitudes*

$$-|a|\,.\,|b| < (c_x \,.\, c_y) < +|a|\,.\,|b|$$

en que

$$|a|\,.\,|b| = \text{valor absoluto producto de } a \text{ por } b,$$

y que todas las propiedades de *una materia* están encerradas en las propiedades del *número absoluto representando el producto variable*

$$ab = \text{número}.$$

Ahora comprendemos el significado de la ecuación fundamental hallada

$$ds^2 = ds_0^2 + \mathrm{R}da,$$

y comprendemos la función del resonador *da*, que es el parámetro de curvatura esférica.

Pasemos ahora a considerar la *atracción* desde otro punto de vista. Repetimos que este fenómeno es, matemáticamente, lo que percibe el cerebro cuando dos propagaciones recíprocas se componen.

Teniendo esto presente es que decimos: el hombre y la mujer son dos formas recíprocas de repetición compuesta. Estas dos formas derivan de *una sola, ab initio,* y la división ha sobrevenido por *descomposición* de la propagación compuesta original. Esta descomposición sólo puede haber tenido lugar por efecto de *una aferencia extraña en la focalización planetaria* (tierra). ¿Cuál puede haber sido esta nueva,

o tardía, aferencia extraña? Una sola y única perceptible, a saber: *la luna*. Quiere decir que la luna *es la recíproca de nuestra tierra* y es debido a su aferencia que se dividió la densificación cerebral humana, *repitiendo el fenómeno* en otro orden de magnitudes, esto es: hombre y mujer. Masculinidad y femininidad, *ad infinitum*. ¿Cuándo se separó la luna? Su fecha está escrita en la divergencia femenina de densificación; en donde ésta se inicia, en la naturaleza observable, ahí estará el dato buscado.

Resulta, de esta manera, que es según el carácter de dos propagaciones que percibiremos los fenómenos de:

Atracción;

Indiferencia;

Repulsión.

De aquí fluye que todos los planetas del sistema solar, siendo formas recíprocas del sol *pueden no serlas entre sí*. No hay razón alguna para creer que la Tierra y Marte se atraigan, o la Tierra y Júpiter, etc. Aquí vislumbramos una nueva razón para estudiar detenidamente todas las clases posibles de fenómenos de eclipses por aferencia, pues, exactamente como la presencia de un enemigo provoca el fenómeno de explosión de ira, guerra, etc., en el hombre, *así puede un planeta o astro, también enemigo, causar este efecto en el sol y éste los sacudimientos terrestres conocidos*, etc. Todo se repite.

EVOLUCIÓN

Se recordará lo dicho en otro lugar, que una variación de la velocidad angular en el movimiento axial de nuestro planeta alteraría completamente el carácter de la simetría invertida de una densificación cerebral relativamente al plano meridiano, etc., y que alargándose el mes lunar actual hasta los cincuenta y cinco días darwinianos (George Darwin) un hombre pasaría a ser un insecto, o un vegetal. Pues bien, como nuestro universo es un *continuum* de repetición y los fenómenos se repiten en todos los órdenes de magnitudes, decimos que: *la actualidad debe revelar este fenómeno descrito por efecto de repetición de órdenes de cerebro, o materia cerebral.*

Basta fijarse en *la obra vital* de cada forma orgánica para cerciorarse de esta verdad. Un hombre densifica obra durante su vida, un animal no densifica obra, un pájaro sí, un insecto densifica en alto grado de perfección, etc. El ciclo de la evolución está a la vista.

APÉNDICE

La repetición y el teorema Einstein-Lorentz

Consideremos un punto P (x_i) y en éste un sistema vectorial básico de referencia normalizado con índices $(-1+3)$, de acuerdo con Sylvester y Minkowsky. Adoptemos como absoluto la forma cuadrática luminosa de Einstein :

$$-c^2dt^2+dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2=0$$

$$cdt=dx_0 \qquad -dx_0^2+dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2=0,$$

siendo esta la condición de *igualdad general espacial*, la densificación infinitesimal tiene por expresión *la divergencia* de esta condición, o sea :

$$ds^2=-dx_0^2+dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2\neq 0,$$

o abreviadamente

$$ds^2=\sum_{i=0}^{3}\varepsilon_i dx_i^2\neq 0 \qquad \begin{cases}\varepsilon_0=-1\\ \varepsilon_{1,2,3}=+1,\end{cases}$$

quere decir que ds^2 es el *elemento infinitesimal de percepción por diferenciación de la condición de igualdad general espacial*, exactamente como, por ejemplo, cuatro puntos pertenecerán a un plano si la determinante formada con sus coordenadas *es nula* y llamamos *volumen* el fenómeno perceptible de la divergencia de esta condición; lo cual se recordará del capítulo I. Así, pues, ds^2 es la expresión matemática de densificación infinitesimal, siendo, por lo tanto, lo que llamamos una dimensionalización, cuya forma más simple es origen del concepto : *distancia entre dos puntos*, de acuerdo con lo explicado.

Fácilmente se deduce, con Weyl y Einstein que

$$ds^2=\sum_{ik=0}^{3}g_{ik}dx_idx_k,$$

en este sistema, en P (x_i) normal :

$$g_{ik}=\begin{cases}0 & i\neq k\\ \varepsilon_i & i=k\end{cases}; \qquad \varepsilon_0=-1; \qquad \varepsilon_{1,2,3}=+1;$$

o sea :

$$g_{00} = -1; \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = +1.$$

Ahora bien, según digresión 0.60, tenemos :

$$c = v^i . f_i$$

$$(cc) = \sum_{ik=0}^{3} v^i v^k (f_i f_k)$$

de donde :

$$g_{ik} = (f_i f_k) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ \varepsilon_i & i = k, \end{cases}$$

o sea :

$$g_{ii} = (f_i f_i) \qquad g_{00} = (f_0 f_0) = -1, \text{ etc.},$$

pero como f es *la potencia escalar* que caracteriza la focalización en $P = (x_i)$, a la par de $\rho = \mu$, la *densidad* (carga) *escalar,* siendo ambas funciones de las coordenadas (x_i), comprendemos la razón de ser de llamar los

$$g_{ik} = (f_i f_k) = \textit{potenciales métricos.}$$

Designemos ahora a

$$\varphi_i = \frac{df}{dx_i}; \qquad \mathbf{s}^i = \rho \mathbf{v}^i;$$

siendo evidentemente

$$\mathbf{v}^i = \frac{dx_i}{ds}$$

y medido en unidades de c luminosas, lo cual exige, para un cambio de unidad, que escribamos en general :

$$\frac{\mathbf{v}^i}{c} = \frac{dx_i}{ds},$$

de aquí :

$$\frac{\mathbf{v}^i}{c} ds = dx_i,$$

comparando :

$$(cc) = \sum_{ik=0}^{3} v^i . v^k . (f_i f_k) = \sum_{ik=0}^{3} g_{ik} . v^i v^k$$

$$1 = \sum_{ik=0}^{3} g_{ik} \frac{v^i}{c} \cdot \frac{v^k}{c}$$

y así

$$ds^2 = \sum_{ik=0}^{3} g_{ik} \frac{v^i}{c} ds \cdot \frac{v^k}{c} ds = \sum_{ik=0}^{3} g_{ik} \cdot dx_i \cdot dx_k,$$

quedando así evidenciada la relación entre la forma Einstein y la forma fundamental de propagación de esta tesis. Resulta, pues, que siendo

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i \cdot \varphi_i$$

será

$$\mathbf{s}^i = \rho \frac{\mathbf{v}^i}{c}, \qquad \varphi_i = \frac{df}{dx_i};$$

busquemos ahora los componentes de $\mathbf{s}$ y φ :

$$\mathbf{s}^0 = \rho \frac{\mathbf{v}^0}{c},$$

pero

$$\frac{\mathbf{v}^0}{c} = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{s}^0 = \rho,$$

puesto que $\mathbf{s}^0$ es la componente temporal y representa *la repetición de posición temporal de la densidad escalar* ρ en P y sabemos que no hay desplazamiento espacial, lo cual implica que ρ describe una paralela al vector temporal universal en P, esto es $\frac{\mathbf{v}^0}{c} = 1$, sigue fácilmente y de una manera análoga :

$$\mathbf{s}^0 = \rho; \qquad \mathbf{s}^1 = \rho \frac{\mathbf{v}^1}{c}; \qquad \mathbf{s}^2 = \rho \frac{\mathbf{v}^2}{c}; \qquad \mathbf{s}^3 = \rho \frac{\mathbf{v}^3}{c};$$

y también si llamamos $\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3$, las propagaciones de φ en las direcciones espaciales, podemos formular así el *vector potencial* Φ, en componentes contravariantes naturalmente :

$$\Phi^0 = \varphi; \qquad \Phi^{1,2,3} = \mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3,$$

y pasando a componentes covariantes :

$$\Phi_0 = g_{00}\Phi^0 = g_{00}\varphi = -\varphi$$

$$\Phi_{1,2,3} = g_{11}\Phi^{1,2,3} = \Phi^{1,2,3},$$

escribiremos φ por Φ y así tenemos

$$\varphi_0 = -\varphi, \qquad \varphi_{1,2,3} = \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3.$$

El lector ve ahora que en P (x_i) se tiene :

$$\mathbf{c} = \mathbf{s}^i \varphi_i,$$

siendo $\mathbf{s}^i$ las componentes contravariantes, que comprenden la aferencia, eferencia y densificación focal en P; mientras que φ_i son las componentes covariantes de *la acción potencial* y comprenden la aferencia, eferencia y potencia focal en el mismo punto P. Tenemos, pues, dos clases de focalización en P, una de densidades escalares y otra de acciones. *El fenómeno producido por la focalización de acciones es precisamente el llamado campo de gravitación,* o *fuerza.*

La hamiltoniana invariante conocida

$$\int_G \mathbf{c}\, dx = \int_G (\mathbf{s}^i \varphi_i)\, dx$$

da por variación

$$\delta \int_G \mathbf{c}\, dx = 0 \qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathbf{s}^i}{dx_i} = 0 \\ \dfrac{d\varphi^i}{dx_i} = 0 \end{cases}$$

en componentes contravariantes del potencial.

Aplicando índices tenemos :

$$(x_0 = ct) \qquad \frac{d\rho}{cdt} + \text{div.} \left(\rho \frac{\mathbf{v}}{c}\right) = 0,$$

o sea si ponemos $s = \frac{1}{c} \rho \mathbf{v}$ con Lorentz :

$$\frac{d\rho}{cdt} + \text{div.}\, s = 0,$$

que es la clásica ecuación de continuidad. Por otra parte, aplicando índices al potencial obtenemos

$$\frac{d\varphi}{cdt} + \text{div.}\, \mathbf{f} = 0,$$

que es la conocida condición impuesta por Lorentz a su célebre *vector potencial* auxiliar (retardado).

Aplicando índices a

$$F_{ik} = \frac{d\varphi_i}{dx_k} - \frac{d\varphi_k}{dx_i}$$

y recordando que $F_{ii} = F_{kk} = 0$ por levo-simetría, y

$$\varphi_i = g_{ii} \varphi^i, \text{ etc.},$$

obtenemos :

$$F_{10} = \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{f}^1}{dt} + \frac{d\varphi}{dx_1}$$

$$F_{20} = \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{f}^2}{dt} + \frac{d\varphi}{dx_2},$$

esto es, vectorialmente :

$$\mathbf{e} = (F_{10}, F_{20}, F_{30}) = \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{f}}{dt} + \text{grad.}\,\varphi$$

$$\mathbf{b} = (F_{23}, F_{31}, F_{12}) = \frac{1}{c}\,\text{rot.}\,\mathbf{f},$$

en que $\mathbf{e}$ = fuerza eléctrica y $\mathbf{b}$ = fuerza magnética de Lorentz, y reconocemos las clásicas ecuaciones del electromagnetismo.

Se ve que

$$\mathbf{e} = (F_{10}, F_{20}, F_{30})$$

es, en covariantes,

$$(\mathbf{e} = F^{01}, F^{02}, F^{03})$$

en contravariantes, siendo

$$F_{10} = g_{11}g_{00}F^{10} = -F^{10} = +F^{01}, \text{ etc.}$$

$$\mathbf{b} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})$$

$$\mathbf{b} = (F^{23}, F^{31}, F^{12}),$$

y aplicando esto a la condición conocida de ser

$$\frac{dF_{kl}}{dx_i} + \frac{dF_{li}}{dx_k} + \frac{dF_{ik}}{dx_l} = 0$$

por ser

$$F_{ik} = \text{rot.}\,(\varphi)$$

hallamos :

$$\frac{dF_{12}}{dx_0} + \frac{dF_{20}}{dx_1} + \frac{dF_{01}}{dx_2} = \frac{d\mathbf{b}_3}{cdt} - \frac{d\mathbf{e}_1}{dx_2} + \frac{d\mathbf{e}_2}{dx_1}$$

$$\frac{dF_{13}}{dx_0} + \frac{dF_{30}}{dx_1} + \frac{dF_{01}}{dx_3} = \frac{d\mathbf{b}_2}{cdt} - \frac{d\mathbf{e}_1}{dx_3} + \frac{d\mathbf{e}_3}{dx_1}, \text{ etc.,}$$

o sea, vectorialmente:

$$= \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{b}}{dt} + \text{rot.}\,\mathbf{e} = 0, \text{ etc.,}$$

que es la conocida ecuación de Maxwell. Variando a i de 1 a 3, sigue:

$$\text{rot. } \mathbf{b} - \frac{d\mathbf{e}}{c dt} = 0, \text{ etc.},$$

simple cuestión de mecánica de cálculo.

Por último, aplicando índices a

$$F_{ik}\mathbf{s}^k = \mathbf{p}_i$$

o en componentes contravariantes:

$$F^{ik}\mathbf{s}_k = \mathbf{p}^i,$$

obtenemos las expresiones de densidad de trabajo

$$\mathbf{p}^0 = (\mathbf{es}), \text{ etc.},$$

que el lector fácilmente puede deducir.

Quiere decir que el sistema de ecuaciones Maxwell Lorentz, está contenido en las formas tensoriales invariantes anteriores y QEF. Así es cómo la repetición y densificación infinitesimal resuelven el teorema de Einstein-Lorentz.

Recordemos que la variación de la hamiltoníana

$$\delta \int_G \mathbf{c} dx = 0$$

nos dió el vínculo entre electricidad y materia por medio de las condiciones

$$\delta \mathbf{p}_i = 0 = \begin{cases} \delta (F_{ik}\mathbf{s}^k) & (a) \\ \delta \left(\dfrac{dT_i^k}{dx_k} - \Gamma_{i\beta}^{\alpha} T_\alpha^\beta \right), & (b) \end{cases}$$

encerrando (a) la ecuación de conservación de impulso y de acción eléctrica y (b) la ecuación de conservación de acción e impulso mecánico de Einstein. La (a) encierra la doble condición:

$$\frac{d\mathbf{s}^i}{dx_i} = 0$$

$$\frac{dF_{ik}}{dx_l} + \frac{dF_{kl}}{dx_i} + \frac{dF_{li}}{dx_k} = 0,$$

mientras que la (b) conduce a la condición einsteniana que remata en la célebre forma llamada cosmológica, como caso particular:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} R \sqrt{g} + \lambda,$$

en que R es la escalar de curvatura

$$R = g_{ik.ik} - g_{ii.kk},$$

la cual nos da la hamiltoniana estacionaria de acción de materia, cuya variación, anulada por integración la divergencia λ,

$$\delta \int \mathbf{G} dx = 0,$$

encierra la ley de gravitación einsteniana.

TEORÍA DE MIE

Mie distinguió entre la acción focal expresada por las componentes contravariantes de una densidad de segundo orden H^{ik} y la acción focal expresada por las componentes del tensor lineal F_{ik}. Esto es :

$$\frac{dH^{ik}}{dx_k} = \mathbf{s}^i, \qquad F_{ik}\,\mathbf{s}^k = \mathbf{p}_i,$$

$$F_{ik} = \frac{d\varphi_i}{dx_k} - \frac{d\varphi_k}{dx_i} \qquad \text{y} \qquad \frac{dF_{kl}}{dx_i} + \frac{dF_{li}}{dx_k} + \frac{dF_{ik}}{dx_l} = 0,$$

esto implica que si teníamos, como recién se vió :

$$\mathbf{e} = (F_{10}, F_{20}. F_{30})$$

$$\mathbf{b} = (F_{23}, F_{31}, F_{12}),$$

o si suponemos que así como F da las componentes **e**, **b**, en tiempo y en espacio, H da las componentes D y **H** respectivamente, será :

$$D = (H_{10}, H_{20}, H_{30})$$

$$\mathbf{H} = (H_{23}, H_{31}, H_{12}),$$

por otra parte recordando las leyes del campo electromagnético aplicados al caso de materia, en que siendo ε y μ constantes *ad hoc :*

$$\mathbf{e} = \mu D$$

$$\mathbf{b} = \varepsilon B,$$

tenemos las clásicas ecuaciones usuales ;

$$\text{div.}\, D = \rho \qquad B + \text{rot.}\, \mathbf{f} = 0 \qquad (1)$$

$$\text{div. B} = 0 \qquad \frac{d\rho}{dt} + \text{div.}\,\mathbf{s} = 0 \tag{2}$$

$$c = 1 \qquad \frac{d\text{B}}{dt} + \text{rot. E} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} + \text{grad.}\,\varphi = \text{E} \tag{4}$$

$$\frac{d\text{D}}{dt} - \text{rot.}\,\mathbf{H} = -\,\mathbf{s}. \tag{5}$$

Mie ahora formula la ecuación de continuidad de acción así :
$\mathbf{W}$ = densidad de energía;
S = flujo de energía.
Se tiene :

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} + \text{div. S} = 0,$$

y se consigue relacionar estas ecuaciones para arribar a la teoría de Maxwell, procediendo de la manera siguiente :

Multiplicando (3) por $\mathbf{H}$ y la (5) por E, luego sumando, después multiplicando la (2) por φ y la (4) por $\mathbf{s}$ y sumando, resulta :

$$\mathbf{H}\frac{d\text{B}}{dt} + \text{E}\frac{d\text{D}}{dt} + \mathbf{H}\,\text{rot. E} - \text{E rot.}\,\mathbf{H} = -\,(\text{E}\mathbf{s})$$

$$\mathbf{H}\,\text{rot. E} - \text{E rot.}\,\mathbf{H} = \text{div.}\,[\text{E}\mathbf{H}]$$

$$\mathbf{H}\frac{d\text{B}}{dt} + \text{E}\frac{d\text{D}}{dt} + \text{div.}\,[\text{E}\mathbf{H}] = -\,(\text{E}\mathbf{s}),$$

también en el otro caso :

$$\varphi\frac{d\rho}{dt} + \mathbf{s}\frac{d\mathbf{f}}{dt} + \text{div.}\,(\varphi\mathbf{s}) = (\text{E}\mathbf{s})$$

y combinando por suma con la anterior :

$$\mathbf{H}\frac{d\text{B}}{dt} + \text{E}\frac{d\text{D}}{dt} + \varphi\frac{d\rho}{dt} + \mathbf{s}\frac{d\mathbf{f}}{dt} + \text{div.}\,\{[\text{E}\mathbf{H}] + (\varphi\mathbf{s})\} = 0;$$

de manera que deberá ser, por continuidad :

$$[\text{E}\mathbf{H}] + (\varphi\mathbf{s}) = \text{S}$$

$$\mathbf{H}\,.\,d\text{B} + \text{E}\,.\,d\text{D} + \varphi d\rho + \mathbf{s}d\mathbf{f} = d\mathbf{W},$$

que da la diferencial total de energía. Mie toma ahora :

$$\mathbf{L} = \mathbf{W} - \mathrm{ED} - \rho\varphi,$$

que da por diferenciación, o variación :

$$\delta\mathbf{L} = \mathbf{H}\delta\mathrm{B} + \mathrm{D} \,.\, \delta\mathrm{E} + \mathbf{s} \,.\, \delta\mathbf{f} - \rho\delta\varphi,$$

y si ahora tenemos en cuenta las componentes de E, D, B y **H**, podemos formular la tensorial invariante :

$$\delta\mathbf{L} = \frac{1}{2}\,\mathrm{H}^{ik}\delta\mathrm{F}_{ik} + \mathbf{s}^{i} \,.\, \delta\varphi_{i},$$

como es fácil comprobar substituyendo índices. Esto demuestra que **L** es invariante y así

$$\int_{\mathrm{G}} \mathbf{L}dx$$

es una hamiltoniana estacionaria, y es la que contiene la teoría de Mie. Quedan así las diez funciones encerradas en una sola. De aquí el tensor mixto, fácil de comprobar substituyendo índices :

$$\mathrm{T}_{i}^{k} = \mathrm{F}_{ir}\mathrm{H}^{kr} + \varphi_{i}\mathbf{s}^{k} - \delta_{i}^{k}\mathbf{L}$$

siendo

$$\mathrm{T}_{ik} = \mathrm{T}_{ki}.$$

———

NOTA DE LA DIRECCIÓN. — Los originales de este trabajo fueron entregados a la Dirección de los *Anales de la Sociedad Científica Argentina* el 15 de noviembre de 1922. — *Julio R. Castiñeiras,* director.

ERRATAS AL PRECEDENTE TRABAJO

Es muy conveniente hacer estas correcciones, antes de proceder al estudio, para evitar posibles confusiones.

Página	Línea	Dice	Debe decir
52	9	$\bar{\xi}^i = \sum_k^n \alpha_k{}^i \xi^k$	$\bar{\xi}^i = \sum_k^n \bar{\alpha}_k{}^i \xi^k$
53	15	$\bar{\xi}_i = \left(\sum_k^n \xi^k e_i \cdot e_k\right) =$	$\xi_i = \left(\sum_k^n \xi^k e_k \cdot e_i\right) =$
53	20	$\xi_i = \sum_k^n g^{ik} \bar{\bar{\xi}}_k$	$\xi_i = \sum_k^n g^{ik} \xi_k$
61	27	$u = \frac{dx}{dt}$	$u^i = \frac{dx_i}{dt}$
63	15	$2\xi^i u_i \xi_k$	$2\xi^i u_i{}^k \xi_k$
135	13	$\xi^i = g^{ik} \bar{\xi}_k$	$\xi^i = g^{ik} \xi_k$
135	14	$\xi_i = g_{ik} \bar{\xi}^k$	$\xi_i = g_{ik} \xi^k$
152	23	$\sum_k^n \frac{d\bar{f}_i}{dx_k} d\bar{\bar{x}}_k$	$\sum_k^n \frac{d\bar{f}_i}{d\bar{\bar{x}}_k} d\bar{\bar{x}}_k$
153	1	pasando del infin. peq.	pasando al infin. peq.
155	37	$\chi_i = \varphi_i(r)$	$x^i = \varphi_i(r)$
158	1	$f^i = \frac{df}{dx_i}$	$f_i = \frac{df}{dx_i}$
162	14	$\frac{d\mathbf{w}_i}{dx_i} = \mathbf{w}$	$\frac{d\mathbf{w}^i}{dx} = \mathbf{w}$
178	7	$\frac{d\xi^i}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^i \xi^\alpha \frac{dx}{ds} = 0$	$\frac{d\xi^i}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^i \xi^\alpha \frac{dx_\beta}{ds} = 0$
192	6	$\mathrm{F}^a{}_{bik} = \mathrm{F}^{*a}{}_{bik} + \frac{1}{2} \mathfrak{z} f_b{}^a{}_{ik}$	$\mathrm{F}^a{}_{bik} = \mathrm{F}^{*a}{}_{bik} + \frac{1}{2} \mathfrak{z}_b{}^a \cdot f_{ik}$
192	13	doblemente simétrico	doblemente levo-simétrico

Página	Línea	Dice	Debe decir
198	18	R por P	R por F
201	21	$(\varphi^i = 0)$	$(\varphi_i = 0)$
206	2 y 3	$d\mathbf{v}$	dV
214	22	$n = 1, 2, 3$	$m = 1, 2, 3$
233	9	$x_k \frac{dx}{ds}$, etc.	$x_k \frac{dx_i}{ds}$, etc.
257	5	$-\sum_{ik}^{n} xx_i \frac{dx_k}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds}$	$-\sum_{ik}^{n} x_i x_i \frac{dx_k}{ds} \cdot \frac{dx_k}{ds}$



INGENIERO SANTIAGO BRIAN

† el 24 de abril de 1923

NECROLOGÍA

INGENIERO SANTIAGO BRIAN

† el 24 de abril de 1923

Una vez más tócame la triste misión de despedir desde las columnas de los *Anales de la Sociedad Científica Argentina* a un consocio caído en la jornada fatal de la existencia.

El ingeniero Santiago Brian, a quien hacía apenas tres meses habíamos tenido el gusto de verle lleno de vigor físico e intelectual, formando parte de la Comisión de honor en el escenario del teatro Cervantes, en la histórica fiesta de nuestro cincuentenario social, celebrada en dicho coliseo, partió al poco tiempo para Mar del Plata, a pasar, como todos los años, su temporada de baños.

Allí le vi, a principios de marzo del corriente año, llamado por él con insistencia para cambiar ideas, me escribía, sobre algunos proyectos míos, referentes al Congreso sudamericano de ferrocarriles Allí le hallé, siempre estudioso, siempre laborioso, preocupado con decidido empeño con los problemas en cuya solución debe necesariamente intervenir la indicada institución ferroviaria internacional.

Al despedirme preguntéle:

— ¿ Cuándo entiende Vd. volver a la Capital ?

—Lo que es yo —contestóme — no lo haré hasta que el tiempo me eche de aquí...

No fué así. Al mal tiempo, sustituyó el morbo, traicionero por lo repentino. El cerebro de nuestro querido consocio y amigo, que tan vigorosamente vibrara en los largos años de su actuación intelectual en el campo de la labor profesional, provechosa por lo competente, constante y comunicativa, quedó de súbito paralizado, en forma tan

grave que a los pocos días, a pesar de los esfuerzos de la ciencia médica por salvarle, quedó vencido.

La ingeniería argentina perdía el 24 de abril próximo pasado a uno de sus representantes más destacados, especialmente en lo que atañe a la construcción y esplotación de ferrocarriles, que fueron su verdadera expecialidad; el país a uno de sus hijos más útiles; los colegas y amigos a un compañero afectuoso, reflejo, por lo demás, de sus virtudes en el propio hogar.

El ingeniero Brian formó parte del primer grupo de estudiantes de la incipiente Facultad de ciencias exactas, que consiguiera fundar el ilustre doctor Juan María Gutiérrez.

Doce fueron ellos, y por eso les denominaron los doce apóstoles.

Y la verdad es que el ingeniero Brian, como el ingeniero Huergo y otros más, fué un verdadero apóstol de la ingeniería nacional. Su entusiasmo por las matemáticas puras y aplicadas a la ciencia de la construcción le conquistó un puesto distinguido como estudiante; luego, la pasión por su carrera le infundió ese espíritu de observación tan necesario para entrar en el conocimiento práctico de la construcción, que es de tanta ayuda para el estudio y proyectación de las obras confiadas a la pericia de un ingeniero; y, por último, el interés por conocer el pensamiento y la obra de los viejos mentores, dentro y fuera del país, le creó justificada fama de competencia profesional, y fué indiscutiblemente reconocido como un sólido consejero técnico entre sus colegas y ante las autoridades del país.

Para justificar mi afirmación basta pasar revista de su actuación profesional.

Voy a hacerlo muy sucintamente.

El ingeniero Santiago Brian, oriundo de una familia oriental, nació en la provincia de Entre Ríos, el 9 de diciembre de 1849. Su familia le puso en uno de los más reputados establecimientos educacionales con que contara el país en aquellos lejanos tiempos, que tal lo era el *Colegio del Caballito,* fundado y dirigido en nuestra Capital por uno de los más meritorios maestros de entonces, en cuya fuente bebieron muchos de los que más tarde habían de figurar entre las personalidades más ilustradas de nuestra patria: me refiero al profesor don Salvador Negrotto, tan injustamente olvidado hoy.

De dicha escuela pasó Brian a la Universidad de Buenos Aires, matriculándose en la Facultad de ciencias exactas, en 1865, es decir,

cuando tenía 16 años de edad. Cinco años más tarde, en 1879, egresó de la misma, diplomado como ingeniero civil.

Comenzó su carrera como ayudante en la Oficina de puentes de la provincia de Buenos Aires, bajo la inmediata dirección del conocido ingeniero inglés don Juan Coghlan.

De allí pasó a formar parte, en 1873, del cuerpo de ingenieros del Ferrocarril del Oeste de la provincia de Buenos Aires, teniendo a su cargo el cuidado de la primera sección de esa ya importante línea.

En 1874 fué ascendido a ingeniero segundo en la misma; y dos años después, a ingeniero principal.

En 1879, el directorio del Ferrocarril del Oeste le envió a Europa en viaje de estudio. Cuando el ingeniero don Augusto Ringuelet, que desempeñaba el cargo de gerente del mismo ferrocarril, se retiró a Europa, el ingeniero Brian fué designado para ocupar el puesto que dejaba el ilustrado técnico mencionado.

Más tarde, decidido a abandonar la vida burocrática, el ingeniero Brian renunció, en 1886, tan elevado cargo, para dedicarse a la arquitectura, como director y constructor a la vez. Numerosas e importantes son las construcciones urbanas realizadas por nuestro consocio.

En 1891, cuando el gobierno de Buenos Aires cometió el craso error de enajenar el Ferrocarril del Oeste, la grande arteria del progreso de la provincia, el sindicato que lo adquirió, nombró al ingeniero Brian su representante legal en nuestra Capital, lo que prueba el alto concepto en que se le tenía. Este puesto lo ocupó, con unánime aplauso, durante veinticinco años, mereciendo de la empresa agradecida un valioso homenaje.

Y la verdad es que mucho abona en favor del ingeniero Brian el haber resistido durante un cuarto de siglo cumpliendo tan delicada misión, cual es la de ser argentino y deber conservarse en la línea neutral de lo ecuo y de lo justo, en la natural lucha de intereses del país y de la empresa que representaba, como lo hizo notar el doctor José A. Frías en su conceptuosa oración fúnebre pronunciada en el momento del sepelio del señor Brian, discurso que publicamos más adelante.

Confirma este aprecio general por las condiciones de competencia y de honestidad de nuestro lamentado consocio, el hecho de que otras empresas extranjeras, como el Ferrocarril Gran Sud de Buenos Aires, Buenos Aires y Rosario, Central Argentino, etc., le designaran miem-

bro de las comisiones locales de las mismas, cargos que llenó cumplidamente hasta hace pocos años.

Santiago Brian fué profesor en la Facultad de ciencias exactas; académico en la misma, y ocupaba últimamente la presidencia de la Academia.

En nuestra asociación fué socio desde los comienzos. Fué más tarde electo presidente de la misma, cargo que tuvo que renunciar por sus ocupaciones.

Fué socio también del Centro nacional de ingenieros, que le nombró luego, en unión con los ingenieros Guillermo White y Carlos C. Olivera, miembro honorario del mismo.

También era miembro del Instituto de ingenieros civiles de Londres; miembro honorario, elegido por aclamación, del Club de Engenharia de Río de Janeiro, y socio correspondiente del Instituto de ingenieros de Chile.

Sus últimas actividades fueron dedicadas a la importante institución « Congreso sudamericano de ferrocarriles », como dije al comenzar esta su corta reseña. Brian ocupó la presidencia de esta asociación internacional por más de diez años consecutivos.

En mi calidad de Secretario general de la misma, puedo aseverar que su dedicación personal fué constante y eficiente, como lo aseveró antes que yo el señor doctor Frías en su indicada oración fúnebre.

Brian contribuyó a formular en Río de Janeiro, coadyuvado eficazmente por los ilustres ingenieros brasileños Antonio Olyntho y Getulio das Neves, el programa de nuestro Segundo congreso sudamericano de ferrocarriles, que fué realizado con feliz éxito, del que nuestro consocio fué proclamado presidente honorario y en el cual hizo una descollante figura.

Damos a continuación los discursos pronunciados en el momento del sepelio.

Del doctor José A. Frías, presidente del « Congreso sudamericano de ferrocarriles »

Señores:

En nombre del Comité ejecutivo del Congreso sudamericano de ferrocarriles vengo a expresar el sentimiento intenso causado por el sensible fallecimiento del ingeniero Santiago Brian, presidente, hasta hace muy poco tiempo, de nuestra institución internacional.

No hé de referirme a las virtudes que, desde su juventud, ornaron la personalidad de nuestro consocio y noble y leal amigo, ya como brillante alumno de la Facultad de ciencias exactas, ya como profesional, al recorrer toda la escala de los cargos que la ingeniería nacional le ofreciera. Otros dirán de su incansable actividad, de su dedicación a los altos estudios matemáticos, de su ponderado criterio, tantas veces demostrado en su larga actuación, que comenzara como ayudante en la Oficina de puentes de la provincia de Buenos Aires, para culminar en la presidencia de la Comisión local del Ferrocarril del Oeste y en los directorios consultivos de los ferrocarriles del Sud, Central Argentino y ex Buenos Aires y Rosario, en cuyos puestos demostró la extensión de sus conocimientos, su tacto y su inteligencia.

En las constantes relaciones con las autoridades de la Nación y de las provincias, que el ejercicio de sus cargos le imponía, el ingeniero Brian, al par que defendía celosamente los intereses de las compañías que representaba, jamás olvidó los altos y permanentes intereses del país, esforzándose en armonizarlos, y siempre obtuvo la consecución de sus propósitos. Vinculó su nombre a las grandes obras públicas que en materia ferroviaria se han ejecutado en los últimos cuarenta años, y, en todo momento, usando prudentemeute de sus grandes condiciones de carácter, salvó asperezas, suavizó roces inevitables y supo mantenerse siempre dentro de la imparcialidad, la equidad y la justicia, situación de espíritu que sólo hombres superiores pueden alcanzar.

Pero, lo que sobre todo deseo manifestar, no sólo por la representación con que he sido honrado, sino más bien para sacarla de la penumbra que para la generalidad de sus conciudadanos la rodea, es su notable actuación en el Segundo Congreso sudamericano de ferrocarriles, celebrado en Río de Janeiro en septiembre del año anterior, con ocasión del centenario de la independencia del Brasil. El ingeniero Brian preparó, en forma realmente eficiente, la realización del referido certamen, al que concurrió con la energía y el entusiasmo que lo caracterizaban, prestando a los distinguidos consocios del Brasil, encargados por el gobierno de esa nación amiga de la organización del congreso, el valioso concurso de su experiencia, a los fines de rodearlo del prestigio que correspondía, dada la naturaleza e importancia de los puntos a tratarse, insertos en su pragrama. Fuí testigo de la laboriosidad desplegada por el ingeniero Brian, no sólo en los actos preparatorios dal congreso, sino viéndolo también asistir asiduamente a las diversas comisiones formadas para el estudio de los distintos te-

mas, haciendo, con amplios conocimientos, exposiciones teóricas y prácticas de verdadero mérito sobre la mayoría de las materias, siendo escuchado siempre con respeto y admiración por los delegados de las naciones amigas que concurrieron a esa asamblea ferroviaria sudamericana.

Esos esfuerzos del ingeniero Brian, en pro de la realización del Segundo Congreso, al que dedicó sus últimos años, fueron coronados por el éxito más completo y consagrados por el aprecio y consideración que las distintas delegaciones le expresaron, en especial el Club de ingeniería del Brasil — institución científica íntimamente vinculada al desenvolvimiento de esa nación, — el cual, después de otras muchas demostraciones del alto concepto que de sus relevantes condiciones había formado, lo designó miembro honorario, distinción que sólo se confiere a las personas que hubieren prestado relevantes servicios a la ingeniería y a la industria.

Es, pues, por muchos motivos, justo el pesar que embarga a los miembros del Comité ejecutivo del Congreso sudamericano de ferrocarriles y a los adherentes a esa institución; y, al dejar cumplido el honroso encargo que de ella he recibido, debo agregar que igualmente las compañías de ferrocarriles argentinos se asocian al duelo público causado por la pérdida que para el país y para ellas representa la desaparición del señor Brian, quien, no obstante su alejamiento de los negocios públicos, continuaba consagrándoles todo el concurso de su inteligencia y de su probidad, haciéndoles llegar, en los momentos difíciles, los consejos de su vasta ilustración y prolongada experiencia.

Señores: Hombres del carácter y temple moral del señor Brian deben servir de ejemplo y de estímulo a las generaciones futuras; el vacío que deja es inmenso, pero no dudo que su espíritu continuará iluminando el sendero que debemos recorrer, aquellos a quienes nos ha tocado sucederle en su larga y proficua labor.

He dicho.

Del ingeniero Enrique Sabaria, presidente del Centro nacional de ingenieros

Señores:

El Centro nacional de ingenieros pierde con el ingeniero Santiago Brian uno de sus socios más conspicuos y estimados. La nómina de sus miembros honorarios recibe rudos golpes; ayer el ingeniero Olivera, hoy Brian.

Quien rememore la historia de nuestros ferrocarriles, encontrará a cada paso la acción eficiente del distinguido profesional que siempre, con inagotable tesón, marca en cada etapa, un progreso, una evolución, para el desarrollo gigantesco de aquel medio de comunicación que nos ofrece el hermoso espectáculo de la transformación paulatina de las antiguas tolderías en florecientes campos de progreso y civilización.

¿ Cómo no admirar lo que significa la actuación del profesional que, en épocas remotas y difíciles, contribuye con toda energía al desarrollo de nuestra incipiente ingeniería, que colabora en forma prominente al progreso de nuestro país ? Señores, la ingeniería argentina tenía en Santiago Brian, un representante que la honraba ; que su ejemplo sirva de guía a nuestros profesionales, que él sirva de acicate en los momentos rudos de la labor diaria, tratando en todo momento de mantener alto el precioso legado de experiencia y laboriosidad que nos deja nuestro apreciado consocio y distinguido ingeniero.

Hacer la biografía de Brian es tarea que, con todo respeto, dejo a cargo de más autorizados que yo. Olvidar una sola de las actuaciones del eminente ingeniero, ya en los distintos puestos que desempeñara, ya en las obras en que intervino con tanto acierto, sería dejar en olvido un precioso eslabón de su vida, tan fecunda por más de un concepto.

Brian era infaltable a las reuniones de nuestro Centro, cuando se debatían asuntos difíciles y delicados ; su presencia infundía en todos esa confianza que se experimenta al lado de aquellas personas que han palpado día a día las dificultades inherentes a la solución de los problemas de nuestra profesión. Ello hace, señores, que siempre estará con nosotros el recuerdo de su personalidad, como ejemplo de labor, energía y honestidad profesionales.

Hay, en estas circunstancias, dolores que las palabras no alcanzan a amenguar ; es hacia ellos que van nuestros más íntimos deseos, para su justo y merecido lenitivo.

Querido consocio : recibe por mis labios el adiós de los que fueron, en el Centro nacional de ingenieros, tus consocios y colegas.

Del señor A. F. Lértora

Señores :

En nombre de la empresa del Ferrocarril Oeste de Buenos Aires, cuya presidencia del directorio local ejerzo, vengo a dar la postrer

despedida al ingeniero Santiago Brian, que por tantos años estuvo vinculado a esta entidad de progreso y a la que prestó relevantes e inapreciables servicios.

Brian pertenecía al primer grupo de ingenieros argentinos, lanzados a la lucha por la naciente escuela de Buenos Aires, hace poco más de cincuenta años. Su larga carrera de obrero de la grandeza nacional no tiene interrupciones: comienza como ingeniero constructor de vías férreas en 1872, buscando en las desiertas llanuras del oeste y del sur de la provincia de Buenos Aires, nuevas rutas para extender el riel civilizador, y cuando las encuentra sólo colma su afanoso empeño la realización plena de la obra emprendida. Y así, uno tras otro, fuéronse eslabonando los trozos del gran sistema de ferrocarriles iniciado en 1857 por un grupo de patriotas y completado más tarde en su desarrollo por el gobierno de Buenos Aires. Al estudio y construcción de gran parte de esa red prestó Brian durante quince años su inteligente y eficaz concurso, ascendiendo paso a paso todas las posiciones: ingeniero de sección, ingeniero principal y, por último, gerente.

Desde 1890 la acción de Brian se desenvuelve en otra forma, aunque en la misma esfera de actividad. Representante de capitales extranjeros que radicaron su inversión en ferrocarriles argentinos, él consagra su inagotable y concienzudo esfuerzo a propiciar nuevas extensiones, que incorporaran a la vida económica de la nación, regiones que aún permanecían improductivas por falta de medios de transporte. En esa brega, sus propósitos alcanzaron el resultado que más pudo halagar su acendrado patriotismo: vió que los ferrocarriles Oeste, Sud y Rosario, a cuyos directorios pertenecía, duplicaron su extensión en menos de veinte años.

La obra del ingeniero Brian, no obstante su extensión, está en su mayor parte consagrada al desarrollo del Ferrocarril del Oeste. Este organismo, que él vió crecer paso a paso, fué escuela de trabajo tesonero y sin fatiga, donde comenzó como alumno y terminó como maestro. Analizar la tarea realizada por Brian en el Ferrocarril del Oeste, significaría escribir la historia de su desenvolvimiento en los últimos cuarenta años.

Es para mí un motivo de hondo pesar, que su desaparición haya coincidido con un acontecimiento que habría hecho vibrar los más puros sentimientos de su afecto: me refiero a la próxima inauguración oficial del servicio eléctrico del Ferrocarril del Oeste, obra que él propició por muchos años con infatigable empeño.

Su preocupación constante fué el engrandecimiento y prosperidad

dal Ferrocarril del Oeste, y nada habría contribuído a hacer más gratos los últimos días de su existencia, como ver realizadas las obras de progreso que en breve incorporaremos definitivamente.

Por fortuna cúpole en vida ver, en parte, premiada su labor con el homenaje que los pueblos tributan a sus buenos servidores: la perpetuación de su memoria ligada a una obra pública que él había gestionado: el dique de cabotaje construído al costado norte del Riachuelo, denominado por decreto del gobierno nacional de 1907, Dique Ingeniero Brian.

Con la desaparición del ingeniero Brian pierde la República uno de sus hombres eminentes. Eminente por los servicios que prestó al desarrollo de la riqueza pública argentina, eminente por el claro ejemplo de virtudes ciudadanas que ofreció en su larga carrera, y eminente también por la austeridad y patriotismo que puso de manifiesto en el desempeño de las funciones públicas y de las actividades de orden privado.

Que las nuevas generaciones argentinas se encarguen de realzar su memoria.

Del doctor Horacio Damianovich

Señores:

En nombre de la Academia de ciencias exactas, físicas y naturales y vista la imposibilidad de su presidente doctor Eduardo Holmberg de asistir al acto, hago uso de la palabra en estos momentos penosos, en que vemos desaparecer de la esfera de la actividad pública a un hombre como Santiago Brian, tan lleno de las virtudes que enaltecen al noble caballero y las excelsas cualidades que dan realce a una verdadera personalidad.

No me corresponde trazar aquí ni siquiera la síntesis de los frutos de su larga y meritoria carrera profesional.

Sólo quiero hacer notar en este instante solemne, que el señor Brian puso todos sus empeños para hacer de nuestra Academia un verdadero foco de cultura superior, con la firme convicción de que esta clase de instituciones están destinadas en la actualidad y, con mejor razón, en un futuro no lejano, a robustecer la obra de investigación científica, tan necesaria en nuestro medio y el adelanto técnico y cultural de nuestro país, lleno de vida y legítimas aspiraciones.

En esta fase de su importante obra, Brian era un soñador y un idealista, que se remontaba a ratos a las atrayentes regiones de la

abstracción, sin dejar por ello de tener a cada instante íntimo contacto con la realidad práctica y los múltiples problemas que con rudeza nos presenta la vida diaria.

Ahí están las actas de nuestra Academia para atestiguar su labor proficua y silenciosa en la que no desmayaba aún en los momentos más difíciles. Sería ocioso entrar en los detalles de esta obra, ya que la Academia ha resuelto dedicar una sesión especial para tributarle en forma amplia el homenaje merecido. Está en la mente de todos los que con él hemos colaborado, el llevar a cabo en forma práctica este homenaje que consistirá, ante todo, en seguir su hermoso ejemplo, llevando a la institución que con tanto cariño dirigió, a la altura que le corresponde.

Señores: al recto caballero, al hombre generoso y noble, al útil y superior propulsor de la técnica y cultura de nuestro país, la Academia ofrece su más sentido tributo, poniendo su nombre, como lema de actividad y nobleza, ante la mirada idealista de la juventud que anhela el adelanto de nuestra generosa y progresista nación.

Del señor Avelino Rolón

Señores:

El pueblo de San Isidro, que goza de una tradición de cultura y patriotismo, ha tenido en el ingeniero Santiago Brian, un colaborador infatigable en las grandes obras de beneficiencia que allí se han realizado.

En ellas ha desarrollado una labor tan destacada y constante que es un deber de conciencia tributarle el homenaje más justiciero de gratitud.

En el Nuevo templo parroquial, en el Colegio Carmen Arriola de Marín, y en la Escuela de artes y oficios Doctor Juan Segundo Fernández, que representan valiosos intereses sociales, el ingeniero Brian prestó el concurso del talento y competencia profesional, pudiendo decirse que su opinión se imponía a nuestra consideración y servía de norma por lo inteligente y acertada.

Era de ver, señores, la perseverancia y preferente atención que el ingeniero Brian dedicaba a esas obras, para conseguir que se pudieran obtener los mayores beneficios que se habían propuesto sus iniciadores.

Y toda esa labor inmensa la llevó a cabo, inspirado por sus sentimientos patrióticos y de caridad, silenciosamente, sin ostentación ni

alarde. Por eso es de justicia, en el momento de la última despedida, presentar a la consideración pública y en particular, del pueblo de San Isidro, los méritos sobresalientes del ingeniero Brian, al servir con tanto empeño y desinterés en esas grandes instituciones de cultura y educación a que me he referido. En nombre de sus compañeros de tareas, cumplo con el penoso deber de expresar nuestras sinceras condolencias, pidiendo a Dios su eterno descanso.

Ahora, sólo me resta reiterar a la distinguida señora doña María Gómez de Brian, así como a los demás deudos, las condolencias generales de la Sociedad Científica Argentina y las mías propias, deseando que el tiempo pueda ejercer en ellos su acción de paz...

S. E. BARABINO.

Mayo de 1923.

ÍNDICE GENERAL

DE LAS

MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO NONAGÉSIMOQUINTO

